

# **Diseño de un Generador de Energía a partir del Movimiento Humano**

Luis Emiro Linares García

Tesis preparada en requerimiento para el  
grado de Ingeniero Electrónico

Director

Alba Graciela Ávila Bernal, Ph.D.

Universidad de los Andes  
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica  
Bogotá D.C.  
Mayo 2009

A todos aquellos que no conozco,  
pero cuya vida y labor hacen posible  
mi vida y mi esfuerzo.  
Aquellos que no han tenido tantas oportunidades,  
pero que siguen luchando.

# Prólogo

En este trabajo de tesis detallamos el modelamiento, fabricación y validación de un generador de energía eléctrica de mesoescala para uso personal. Un generador electromagnético con “resortes magnéticos” es calculado por medio de un programa de optimización basado en algoritmos genéticos, que genera una geometría óptima respecto a generación de energía y tamaño del generador. La respuesta del generador es simulada a partir de mediciones de movimientos corporales efectuadas en un laboratorio de marcha, dando mayor confiabilidad al cálculo. Se comparan los resultados experimentales con las simulaciones, y se discuten las discrepancias.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Estado del Arte en Cosecha de Energía</b>	<b>3</b>
1.1. Generación de Energía	3
1.1.1. Efecto Fotovoltáico	3
1.1.2. Efecto Termoeléctrico	5
1.1.3. Efecto Piezoeléctrico	5
1.1.4. Inducción magnética	5
1.1.5. Efecto Magnetostrictivo	5
1.2. Adaptación Eléctrica a la Carga	6
<b>2. Modelamiento del Generador</b>	<b>7</b>
2.1. Geometría del Dispositivo	7
2.2. Campo magnético debido a un imán cilíndrico	8
2.2.1. El campo magnético en la línea $\rho = 0$	10
2.2.2. Las transformadas inversas de Laplace	10
2.2.3. Campo en una coordenada arbitraria $(\rho, z)$	11
2.3. Fuerza en un imán debida a un segundo imán	12
2.4. Inducción Electromagnética	14
2.4.1. Voltaje inducido en una bobina	14
2.4.2. Campo y Fuerza Magnética producida por una bobina	20
2.5. Una transformación para el cálculo numérico	22
2.6. Sistema dinámico	24
<b>3. Simulación del Generador</b>	<b>25</b>
3.1. Simulaciones Estáticas	25
3.1.1. Campo magnético emanado por un imán cilíndrico	25
3.1.2. Campo magnético producido por una corriente estacionaria en una bobina	25
3.1.3. Fuerza magnética entre dos imanes cilíndricos	26
3.2. Simulaciones Dinámicas	26
<b>4. Montajes Experimentales del Proyecto</b>	<b>32</b>
4.1. Análisis de Movimientos Corporales	32
4.1.1. Captura Óptica Especializada	32
4.1.2. Captura Inercial Inalámbrica	33
4.2. Validación Experimental del Generador	38

<b>5. Resultados</b>	<b>43</b>
5.1. Optimización de la Estructura . . . . .	43
5.1.1. Planteamiento . . . . .	43
5.1.2. Resultados . . . . .	44
5.2. Datos experimentales . . . . .	45
5.2.1. Resultados usando la configuración 1 . . . . .	46
5.2.2. Resultados usando la configuración 2 . . . . .	48
5.3. Discusión de resultados . . . . .	48
<b>Comentarios Finales</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# Índice de figuras

2.1.	Parámetros de la geometría del generador . . . . .	8
2.2.	Coordenadas para un imán fuera del origen . . . . .	12
2.3.	Dos imanes, sección transversal axi-simétrica . . . . .	13
2.4.	Un imán y una bobina, sección transversal axi-simétrica . . . . .	14
3.1.	Campo magnético emanado por un imán cilíndrico . . . . .	26
3.2.	Campo magnético generado por una corriente en una bobina cilíndrica . . . . .	27
3.3.	Dos imanes cilíndricos enfrentados para el cálculo de la fuerza magnética de repulsión mutua . . . . .	28
3.4.	Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento = $0 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	29
3.5.	Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento = $0.2 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	30
3.6.	Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento = $0.5 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	30
3.7.	Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento = $1 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	31
3.8.	Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento = $2 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	31
4.1.	Fotogramas de la animación generada por el software de los datos de la captura . . . . .	34
4.2.	Magnitud de la velocidad en cada punto observado, para cada movimiento . . . . .	35
4.3.	Magnitud de la aceleración en cada punto observado, para cada movimiento, durante un ciclo de marcha . . . . .	36
4.4.	Comparación de potencias generadas en cada miembro por cada movimiento, durante un ciclo de marcha . . . . .	37
4.5.	Unidad Inercial de Posicionamiento implementada en una tarjeta de prototipado . . . . .	37
4.6.	Diagrama Esquemático del circuito del Amplificador de Instrumentación AD620 . . . . .	38
4.7.	Diagrama Esquemático del circuito del transceptor RF XBee . . . . .	39
4.8.	Fotografía de los dos circuitos fabricados . . . . .	39
4.9.	Interfaz Gráfica de la aplicación de adquisición de datos en LabView . . . . .	40
4.10.	Programación de la aplicación de adquisición de datos en LabView . . . . .	41
4.11.	Fotografías del generador construido y del montaje experimental instalado . . . . .	42
5.1.	Resultado del programa de optimización . . . . .	45
5.2.	Comparación de potencias generadas en cada miembro por cada movimiento, durante un ciclo de marcha, para dos combinaciones de parámetros geométricos (ver tabla 5.1) . . . . .	46
5.3.	Comparaciones Experimento/Simulación para la Configuración 1 (ver la tabla 5.2) . . . . .	47

5.4. Generación de Energía con la Configuración 1 (ver la tabla 5.2) . . . . .	49
5.5. Datos de voltaje de 2 experimentos con la Configuración 2 (ver la tabla 5.2) . . . . .	50
5.6. Generación de Energía con la Configuración 2 (ver la tabla 5.2) . . . . .	51

# Índice de tablas

1.1. Sumario de métodos recientemente reportados en Cosecha de Energía . . . . .	4
2.1. Límites de integración para los casos de inducción en la bobina . . . . .	18
2.2. Expresiones para la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ en cada caso de ubicación del imán cilíndrico móvil . . . . .	20
2.3. Expresiones para la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ en cada caso de ubicación del imán cilíndrico móvil . . . . .	24
3.1. Comparación de resultados de la fuerza magnética de repulsión mutua entre dos imanes . . . . .	28
5.1. Combinaciones de imanes fijos y móviles probadas en el programa de optimización	45
5.2. Configuraciones de imanes fijos probadas en la validación experimental . . . . .	45

# Introducción

La inclusión de dispositivos móviles basados en baterías en el estilo de vida de las personas es una tendencia en crecimiento [1]. Cada vez más las personas dependen de la utilización de dispositivos tales como teléfonos celulares, organizadores personales (PDA), etc. para manejar sus actividades, distribuir su tiempo y socializar, entre otras funciones. Esto supone un problema en el momento en que la batería ha sido completamente agotada, pues los usuarios usualmente no llevan consigo el elemento recargador de la misma, y aún cuando el recargador estuviese disponible, no siempre se presenta a la mano un zócalo de la red eléctrica. Más crítico aún es el problema de los dispositivos implantables en el cuerpo humano, los cuales hasta el momento han requerido del uso de baterías, las cuales tienen tres problemas fundamentales: su capacidad finita, su gran volumen (respecto a los dispositivos que típicamente alimentan) y su alta toxicidad en caso de fugas al exterior [2].

Una solución que se ha estado explorando desde hace relativamente pocos años [3] es el aprovechamiento de las fuentes ambientales de energía, tales como gradientes de temperatura, vibraciones o movimientos recurrentes y movimiento de fluidos, entre otros. Tal solución es comúnmente llamada “Cosecha de Energía” (*Energy Harvesting* en inglés). Se hace a través de la explotación de varios efectos físicos, tales como la termoelectricidad, piezoelectricidad y la inducción magnética [4]. En el caso de termoelectricidad, gradientes de temperatura que sean consecuencia de calor disipado pueden ser aprovechados. La Piezoelectricidad y la inducción magnética generan energía a partir de movimientos o vibraciones. Para un mecanismo piezoeléctrico éstos movimientos deben convertirse en deformaciones de barras piezoeléctricas, de tal forma que el esfuerzo aplicado a las mismas libere carga eléctrica. En el caso de inducción (también llamado simplemente “electromagnético”), el movimiento debe ser un desplazamiento relativo entre un imán y una bobina, de tal forma que el cambio en el flujo magnético en la bobina debido a este desplazamiento relativo induzca un voltaje que, al conectarse a una carga eléctrica, libere una corriente eléctrica.

Una característica común a estos métodos es que la fuente es pulsada e irregular, originando cantidades de energía con poca regularidad y con intensidad variable, aleatoria en algunos casos. Las vibraciones ambientales son ejemplo de una fuente con alta aleatoriedad, pues son producto de los movimientos inducidos por muchos procesos físicos independientes. Un ejemplo de una fuente relativamente más constante son los gradientes de temperatura [5, 6], donde uno de los reservorios de calor es el ambiente, que tiene una temperatura relativamente estable. El otro reservorio puede ser, por ejemplo, una máquina que disipa calor, o una parte del cuerpo humano, que también son casos de zonas con cierta estabilidad térmica. De cualquier forma, esta naturaleza irregular de estas fuentes demanda del uso de circuitos de adaptación que obtengan voltajes y/o corrientes reguladas, sin reducir drásticamente la eficiencia total del proceso. Esto debido a que los dispositivos que se usan en la cotidianidad requieren de fuentes reguladas, normalmente en voltaje, para su alimentación.

Una implementación de esta solución es lo que perseguimos en este proyecto. Nuestro objetivo es poder generar una potencia RMS de alrededor de 5 mW, que es un nivel promedio de consumo de

dispositivos móviles pequeños tales como teléfonos celulares, reproductores multimedia básicos, etc. En vista de las actividades físicas que las personas obligatoriamente efectúan a diario dentro de su estilo de vida (caminar, subir/bajar escaleras, ocasionalmente correr, etc.), los movimientos corporales proveen un mayor potencial de generación de energía para mantener la carga de un dispositivo móvil a baterías [6]. Sin embargo, en este trabajo no abordamos el problema del circuito de adaptación a la carga, solamente se atacó el problema de la generación. La construcción de este proyecto procede así:

- En el [capítulo 1](#) se revisa el estado del arte en Cosecha de Energía, citando demostraciones experimentales y simulaciones de los varios tipos de generadores ya disponibles.
- En el [capítulo 2](#) se desarrolla el modelo matemático del generador, con miras a obtener las ecuaciones dinámicas del mismo, a fin de obtener ante un movimiento externo dado la energía generada por la estructura.
- En el [capítulo 3](#) se muestran simulaciones del modelo desarrollado, comparando además con los resultados del software *COMSOL Multiphysics*.
- En el [capítulo 4](#) se muestran los análisis de movimientos corporales que se llevaron a cabo para calibrar de forma confiable los parámetros de la estructura del generador. Así mismo, se detalla el montaje experimental que se utilizó para la validación del generador fabricado.
- En el [capítulo 5](#) se comparan los resultados experimentales con las simulaciones numéricas, con el propósito de validar la estructura fabricada.
- Finalizamos con unos [comentarios finales](#), donde además indicamos direcciones de investigación y extensión de este proyecto.

# Capítulo 1

## Estado del Arte en Cosecha de Energía

Comenzamos nuestro proyecto con una revisión de la literatura más actual referente al campo de la Cosecha de Energía. Al conocer las posibilidades, requerimientos y limitaciones de los distintos métodos de generación de energía podemos elegir uno de ellos que nos sea fácilmente implementable, y que responda a las necesidades planteadas en este proyecto.

En la literatura consultada sobre Cosecha de Energía (que, valga decirlo, es una cantidad pequeña comparada con todo lo que se encuentra sobre el tema en las principales bases de datos científicas) se atacan dos problemas fundamentales: La generación misma de energía a partir de las fuentes ambientales (o dicho de forma más general, *residuales*), y la adaptación eléctrica de esta energía cosechada a niveles regulados de voltaje/corriente para la carga específica que se desea alimentar (p.ej. un celular Nokia 1208 requiere de una alimentación de 5 V<sub>DC</sub> regulados para recargar su batería de iones de Litio). Mostramos ahora los resultados que encontramos en la literatura sobre estos dos problema.

### 1.1. Generación de Energía

La generación de energía se subdivide, a su vez, en los métodos de conversión de la energía residual que se quiere cosechar. Cada uno de ellos emplea materiales distintos y -anticipándonos a las conclusiones de esta revisión- resultan apropiados para aplicaciones distintas. Describiremos brevemente cada uno de los métodos y referimos al lector a la [tabla 1.1](#) para un resumen de las construcciones encontradas. Los métodos hallados son:

- [Efecto Fotovoltáico](#)
- [Efecto Termoeléctrico](#)
- [Efecto Piezoeléctrico](#)
- [Inducción Magnética](#)
- [Efecto Magnetostrictivo](#)

#### 1.1.1. Efecto Fotovoltáico

Este efecto le dió a Albert Einstein el Premio Nobel de Física en 1921 por su exitosa formulación en 1905. Se trata de la conversión de un fotón en energía cinética de un electrón débilmente

	<b>Mecanismo</b>	<b>Materiales</b>	<sup>a</sup> P <sub>gen</sub> (W)	<sup>b</sup> Vol. (cm <sup>3</sup> )	<sup>c</sup> V <sub>out</sub> (V)	<b>Ref.</b>	
Vibración	Inducción Magnética	NdFeB, Cu	2.46 m	12.48	2	[7]	
	Inducción Magnética	Silicio, Cobre, Kapton	50 $\mu$	1	200 m	[8]	
	Inducción Magnética	NdFeB, SiO <sub>2</sub> , Cu	79.73 m	0.024	9.08	[9]	
	Inducción Magnética	NdFeB, Cu	1.89 m	0.081	0.2	[10]	
	Inducción Magnética	NdFeB, Cu, Tungsteno, InOx <sup>d</sup>	45 $\mu$	0.15	0.42	[11]	
	Piezoelectricidad	ZnO, Si, Pt, Ag	5 n	2.16 $\mu$	10 m	[12]	
	Piezoelectricidad	ZnO, Si, Pt, TiO <sub>2</sub>	1 $\mu$	100 $\mu$	0.185	[13]	
	Piezoelectricidad	PZT, Si, Pt, TiO <sub>2</sub>	2.2 $\mu$	0.116	0.5	[14]	
	Piezoelectricidad	PVDF	0.6 $\mu$	0.25	1	[15]	
	Piezoelectricidad	Al	400 $\mu$	0.25	3	[1]	
	Magnetostricción	Terfenol-D	242	8.83	13	[16]	
	Generación Electrostática	Si, SiN, Tungsteno	1.2 $\mu$	3.47	9	[17]	
	Generación Electrostática	Si, SiN	1.8 $\mu$	5.53	6	[18]	
	Generación Electrostática	Si, SiO <sub>2</sub> , Pt, Al, Vidrio	4.28 $\mu$	0.243	0.68	[19]	
	Generación Electrostática	Cu, SiO <sub>2</sub> , Vidrio, InOx <sup>d</sup>	40 $\mu$	0.061	20	[20]	
	Generación Electrostática	Cu, Si, Al, Au	16 n	518.4 $\mu$	0.3	[21]	
	Temper.	Termoelectricidad	Si	1.5 $\mu$	33 $\mu$	1.06	[22]
		Termoelectricidad	Si	900 $\mu$	5.76 $\mu$	2.1	[23]
		Termoelectricidad	Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	100 $\mu$	0.153	2.4	[24]
Luz	Fotoelectricidad	Si	5 $\mu$	600 p	0.5	[25]	
	Fotoelectricidad	Si	7.26 m	400	2	[26]	
	Termoelectricidad	Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	100 $\mu$	0.153	2.4	[24]	

Tabla 1.1: Sumario de métodos recientemente reportados en Cosecha de Energía

<sup>a</sup>Potencia generada

<sup>b</sup>Volumen total

<sup>c</sup>Voltaje de salida con carga

<sup>d</sup>Acero Inoxidable

ligado a un átomo, de tal forma que se libera y, en conjunto macroscópico, se genera una corriente eléctrica. En la actualidad, Si bien las celdas fotovoltaicas son dispositivos muy prometedores para la generación de energía, a nivel de microgeneradores su uso no es muy extendido, en general debido a las condiciones de iluminación tenue en que las que se encuentran los dispositivos de aplicación [3]. Su mayor potencial se manifiesta cuando se aplica en usos exteriores, a cielo abierto, como se muestra en el nodo sensor inalámbrico autónomo construido en [27].

### **1.1.2. Efecto Termoeléctrico**

Cuando dos metales disímiles se ponen en contacto a través de dos uniones o puntos de toque, si existe una diferencia de temperatura entre estos dos contactos, se establecerá un voltaje (y si se cierra el circuito con una resistencia de carga, entonces se generará una corriente). Este es el efecto Thompson. El efecto recíproco también sucede, y es llamado el efecto Peltier. Estos dos efectos se reúnen bajo un mismo nombre, el efecto Seebeck, en honor al físico alemán Thomas Johann Seebeck que realizó experimentos en este campo y publicó sus resultados [28]. Fue uno de los primeros fenómenos en ser considerados para su aplicación en Cosecha de Energía, y actualmente existen dispositivos comerciales que lo utilizan como fuente primaria de alimentación, tales como un reloj de Seiko, descrito en [3].

### **1.1.3. Efecto Piezoeléctrico**

Este efecto es una propiedad intrínseca de ciertos materiales eléctricamente polarizados (en otras palabras, con carga eléctrica remanente) por la cual su polarización está acoplada con esfuerzos mecánicos en la muestra del material. De esta forma, si una tensión mecánica es ejercida en la muestra, la polarización del material cambiará en respuesta a dicha excitación; de forma recíproca, si un campo eléctrico es aplicado a la muestra, ésta se deformará como consecuencia del esfuerzo mecánico generado en respuesta a la excitación eléctrica. Actualmente es uno de los métodos más investigados en Cosecha de Energía [12], encontrándose en la literatura técnica cientos de prototipos validados que emplean este método.

### **1.1.4. Inducción magnética**

Este fenómeno es una de las leyes fundamentales del electromagnetismo, por la cual una variación temporal en el flujo magnético en un circuito inducirá en este un campo eléctrico, y viceversa. Está descrito cuantitativamente por la ley de Maxwell-Faraday. La disponibilidad de materiales con alta capacidad de magnetización remanente (basados en elementos de Tierras Raras) hace de este efecto otro de los más empleados en la investigación en Cosecha de Energía, encontrándose un gran número de artículos describiendo el modelamiento y fabricación de múltiples arquitecturas de generación.

### **1.1.5. Efecto Magnetostrictivo**

Este efecto es el análogo magnetostático al efecto piezoeléctrico, induciéndose cambios a la magnetización remanente del material en respuesta a tensiones mecánicas aplicadas al mismo. El efecto recíproco también sucede, es decir, el material sufrirá un cambio de forma (se generará un esfuerzo mecánico en su interior) en respuesta a un campo magnético aplicado. El artículo al que referimos al lector para una exposición más completa es [16].

## 1.2. Adaptación Eléctrica a la Carga

Una vez se ha cosechado la energía residual por medio de alguno de los métodos expuestos, los perfiles de voltaje y corriente con los que se manifiesta esta energía cosechada no son por lo general aplicables directamente a las cargas o dispositivos que se desean alimentar. Por lo tanto se requieren de sistemas cuyo efecto final sea el de transformar la energía eléctrica de una forma no regulada a una regulada. Los principales procesos por los cuales esta energía debe transformarse para poderse entregar a una carga típica son:

### 1. Rectificación

Debido a la naturaleza de las vibraciones, las formas de corriente y voltaje generados son por regla general bipolares y oscilatorias. Para corregir esta situación, se emplean circuitos con diodos pasivos como los expuestos en [29–32] o rectificadores activos completos como en [33]. Otra alternativa es el empleo de multiplicadores capacitivos de voltaje, como se muestra en [11, 18].

### 2. Adaptación impedancia de entrada

Cualquier generador o fuente de energía puede ser modelado como una fuente ideal en serie con una impedancia de salida. El teorema de máxima transferencia de potencia establece que la carga que se conecte a esta fuente extraerá la mayor potencia posible de la misma si su impedancia es igual a la impedancia de la fuente. Esto supone una restricción de diseño, pues en general la impedancia de salida del generador de energía será diferente a la del dispositivo que se va a alimentar, presentándose así generación subóptima en el caso de una conexión directa. Cuando el objetivo es distinto a alcanzar máxima transferencia de potencia (por ejemplo, se puede optar por máxima transferencia de *energía por ciclo*), la impedancia conectada al generador puede incluso ser dependiente del tiempo [6]. En cualquiera de estos casos, se necesita de un bloque que asegure que la condición objetivo de transferencia sea cumplida. Los trabajos de [6, 31, 32] muestran posibilidades para dicho bloque.

### 3. Cambio de nivel de voltaje

En aplicaciones de Cosecha de Energía suele ser conveniente (y en muchas ocasiones, *necesario*) el cambio de niveles DC para propósitos tales como la carga de una batería, aumento en la utilización de un (super)condensador y acondicionamiento de salida. Este proceso se efectúa por medio de elementos de almacenamiento (inductores y condensadores) y dispositivos de conmutación (FETs), conectándolos en topologías que permiten elevar y/o reducir el nivel DC de entrada, alterando al mismo tiempo las impedancias de entrada y salida del convertidor. Por esta razón, éste proceso suele estar integrado al anterior, como se observa en [32]. Otras referencias de implementación de esta función son [31, 34, 35]. Una alternativa al uso de dispositivos semiconductores de conmutación e inductores para almacenamiento de energía está descrita en [36], donde proponen fabricar un MEMS donde un par de condensadores variables mecánicamente acoplados efectúan transferencia mutua de carga a frecuencias de hasta 1 MHz. Las ventajas expuestas son la eliminación de pérdidas por conmutación, polarización de semiconductores y resistencias de encendido (*on-state resistance*).

# Capítulo 2

## Modelamiento del Generador

En este capítulo se hace el modelamiento de la estructura electromagnética a partir de las leyes físicas relevantes, hasta llegar a una formulación de la dinámica del sistema ante un movimiento inducido externo en términos de ecuaciones diferenciales. Los fenómenos físicos que entran en juego en la dinámica de este dispositivo son:

- La fuerza de repulsión entre pares de imanes, por medio de sus campos magnéticos emanados.
- La inducción de voltaje en la bobina debido al movimiento relativo del imán móvil respecto a la misma.
- La fuerza de amortiguamiento ejercida por la bobina en el imán móvil debido al campo magnético generado por su corriente inducida.
- La fuerza de amortiguamiento debido al rozamiento del imán móvil con su contenedor.

La estructura del generador tiene simetría cilíndrica, por lo que su modelamiento es más fácilmente desarrollado en coordenadas cilíndricas y aprovechando las consecuencias de ésta simetría. En las siguientes secciones detallamos los resultados del modelamiento para cada uno de estos efectos. Para el cálculo de todos los observables, téngase en cuenta la siguiente notación:  $\mathbf{x}$  es una coordenada de observación o “prueba” para observables que sean campos.  $\mathbf{x}'$  es una coordenada de integración, empleada en todos los observables, para agregar las contribuciones de los elementos infinitesimales que intervienen en el cálculo. De igual manera, todos los objetos primados son referidos a esta coordenada de integración.  $\mathbf{B}$  es el campo magnético producido por alguna distribución de corriente y/o una región con magnetización remanente  $\mathbf{M}$ , y  $\mathbf{H}$  es la intensidad de campo magnético. El sistema de coordenadas es cilíndrico con coordenadas  $(\rho, \phi, z)$ . Finalmente,  $J_\nu(x)$  son las funciones de Bessel de primera especie de orden  $\nu$ .

### 2.1. Geometría del Dispositivo

En la [figura 2.1](#) se presentan los parámetros que configuran la geometría de la estructura del dispositivo. La figura muestra un cilindro (plástico) que contiene dos imanes fijos, y uno móvil, que en reposo se encuentra en una posición fija debido al equilibrio de las fuerzas repulsivas con los imanes fijos. Estos parámetros son:  $L$  la longitud de la estructura,  $r_m$  el radio del imán móvil y  $h_m$  su grosor. El radio interior del contenedor tubular es idéntico (o aproximadamente igual) al radio del imán móvil.  $r_f$  es el radio de los imanes fijos y  $h_f$  el grosor de los mismos. El embobinado

a su vez tiene como parámetros  $N$ , el número de espiras del embobinado, y  $L_b$  la longitud del mismo. El embobinado se hace con una sola capa de espiras, por lo que la densidad longitudinal de espiras es  $\eta = N/L_b$ . Estos parámetros son grados de libertad que controlan las figuras de desempeño del dispositivo, tales como la respuesta en frecuencia y la potencia generable máxima. Como parámetros no controlables encontramos la densidad de flujo remanente de los imanes y su densidad de masa. Estos se pueden ver como restricciones al momento de configurar el problema de optimización de los parámetros libres.

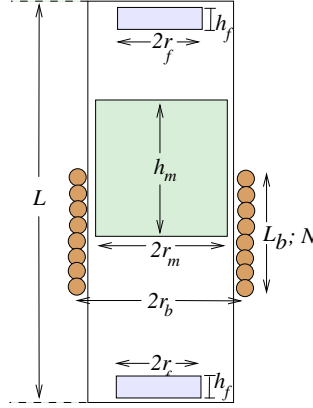


Figura 2.1: Parámetros de la geometría del generador

## 2.2. Campo magnético debido a un imán cilíndrico

Como se describe en [37], el potencial escalar magnético  $\Phi_M(\mathbf{x})$  debido a un imán permanente (región con magnetización remanente  $\mathbf{M}$ ) está dado por:

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \hat{n}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' \quad (2.2.1)$$

En lo que sigue, fijamos el imán al origen, es decir, su cara plana inferior se encuentra en  $z = 0$ . Éste tiene radio  $r_I$  y grosor  $h$ . Asumimos que el imán está magnetizado homogéneamente en su dirección axial. En este caso,  $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$  y el término de volumen en la expresión anterior se anula. Para el término restante de superficie, la única componente de la integración que sobrevive es aquella ubicada en las caras planas del imán ( $z' = \{0, h\}$ ), pues allí se cumple que el vector normal a la superficie  $\hat{n}$  es igual a  $\pm \hat{z}$ , dependiendo del caso:

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{M_0}{4\pi} \left( \int_{C.superior} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho' d\rho' d\phi' - \int_{C.inferior} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho' d\rho' d\phi' \right) \quad (2.2.2)$$

Antes de continuar, es necesario notar en este punto que la evaluación de estas integrales para  $\rho \neq 0$  da lugar a expresiones muy largas que irremediamente conducirán a integrales que solo pueden ser calculadas numéricamente, dando lugar a largos tiempos de cálculo e imprecisión del mismo. Por tanto, es necesario reducir al mínimo el número de estas integrales, explotando la simetría axial que presenta este problema. Los problemas magnetostáticos con simetría cilíndrica como

el presente admiten una expresión del potencial magnético en términos de funciones de Bessel así [37]:

$$\Phi_M(\rho, z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} dk F(k) e^{-kz} J_0(k\rho) & , z \geq h \\ \int_0^{\infty} dk (G(k)e^{kz} + H(k)e^{-kz}) J_0(k\rho) & , 0 < z < h \\ \int_0^{\infty} dk I(k) e^{kz} J_0(k\rho) & , z \leq 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

El campo magnético  $\mathbf{B}$  se obtiene del potencial escalar magnético en el espacio exterior por medio de la relación  $\mathbf{B} = \mu_0(-\nabla\Phi_M + \mathbf{M})$ . La componente  $z$  entonces está dada por  $B_z = \mu_0(-\partial_z\Phi_M + M_z)$ . Entonces:

$$B_z(\rho, z) = \begin{cases} \mu_0 \int_0^{\infty} dk \tilde{F}(k) e^{-kz} J_0(k\rho) & , z \geq h \\ \mu_0 \int_0^{\infty} dk (\tilde{H}(k)e^{-kz} - \tilde{G}(k)e^{kz}) J_0(k\rho) & , 0 < z < h, \rho > r_I \\ \mu_0 \left[ M_0 + \int_0^{\infty} dk (\tilde{H}(k)e^{-kz} - \tilde{G}(k)e^{kz}) J_0(k\rho) \right] & , 0 < z < h, \rho \leq r_I \\ -\mu_0 \int_0^{\infty} dk \tilde{I}(k) e^{kz} J_0(k\rho) & , z \leq 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Se adoptó la siguiente notación:  $\tilde{X}(k) = kX(k) \forall X$ . Nótese que al evaluar en la línea  $\rho = 0$ , en las regiones  $z \geq h$  y  $z \leq 0$ :

$$B_z(0, z) = \begin{cases} \mu_0 \int_0^{\infty} dk \tilde{F}(k) e^{-kz} \Rightarrow B_z(0, z) = \mu_0 \mathcal{L}\{\tilde{F}(k)\} & , z \geq h \\ -\mu_0 \int_0^{\infty} dk \tilde{I}(k) e^{-kz} \Rightarrow B_z(0, -z) = -\mu_0 \mathcal{L}\{\tilde{I}(k)\} & , z \leq 0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

La ecuación anterior indica que  $B_z(0, z)$  es la transformada de Laplace de la función  $\mu_0\tilde{F}(k)$  para  $z \geq h$  y que también  $B_z(0, -z)$  lo es de  $-\mu_0\tilde{I}(k)$  para  $z \leq 0$ . Si se pudiese calcular el campo magnético  $B_z(0, z)$ , se podrían obtener las funciones  $\tilde{F}(k)$  y  $\tilde{I}(k)$  y así calcular con precisión el campo en cualquier otro punto, por medio de (2.2.4). Estas dos funciones se relacionan con  $\tilde{H}(k)$  y  $\tilde{G}(k)$  por medio de las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} H_\rho(\rho, z = h^+) = H_\rho(\rho, z = h^-) &\Rightarrow \frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \Big|_{z=h^+} = \frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \Big|_{z=h^-} \\ H_\rho(\rho, z = 0^+) = H_\rho(\rho, z = 0^-) &\Rightarrow \frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \Big|_{z=0^+} = \frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \Big|_{z=0^-} \end{aligned}$$

Aplicando estas relaciones a (2.2.3) se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(k) + \tilde{G}(k)e^{2kh} &= \tilde{F}(k) \\ \tilde{H}(k) + \tilde{G}(k) &= \tilde{I}(k)\end{aligned}$$

Invirtiendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$\tilde{H}(k) = \frac{e^{2hk}\tilde{I}(k) - \tilde{F}(k)}{e^{2hk} - 1} \quad (2.2.6)$$

$$\tilde{G}(k) = \frac{\tilde{F}(k) - \tilde{I}(k)}{e^{2hk} - 1} \quad (2.2.7)$$

Ahora vamos a calcular  $\tilde{F}(k)$  y  $\tilde{I}(k)$ .

### 2.2.1. El campo magnético en la línea $\rho = 0$

En esta línea sí se puede calcular analíticamente la integral de la ecuación (2.2.2). Esto es:

$$\begin{aligned}\Phi_M(0, z) &= \frac{M_0}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{r_I} \frac{\rho'}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho'^2}} d\rho' d\phi' \Big|_{z'=h} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^{r_I} ((z - z')^2 + \rho'^2)^{-1/2} \rho' d\rho' d\phi' \Big|_{z'=0} \right) \\ &= \frac{1}{2} M_0 \left( \sqrt{(h - z)^2 + r_I^2} - \sqrt{r_I^2 + z^2} - |h - z| + |z| \right)\end{aligned}$$

Evaluamos  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \nabla \Phi_M$  en el exterior del imán y  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (-\nabla \Phi_M + \mathbf{M})$  en el interior. En la línea  $\rho = 0$  solo sobrevive la componente  $z$  del campo, de donde obtenemos el campo en todo el eje  $\rho = 0, \forall z \in \mathbb{R}$ :

$$B_z(0, z) = -\mu_0 \partial_z \Phi_M(0, z) = -\frac{1}{2} M_0 \mu_0 \left( \frac{z - h}{\sqrt{(h - z)^2 + r_I^2}} - \frac{z}{\sqrt{r_I^2 + z^2}} \right) \quad (2.2.8)$$

### 2.2.2. Las transformadas inversas de Laplace

De la ecuación (2.2.8) conocemos el campo magnético en la línea  $\rho = 0$ , y de (2.2.5) podemos obtener las funciones  $\tilde{F}(k)$  y  $\tilde{I}(k)$  por medio de la transformada inversa de Laplace. El resultado es:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(k) &= -\frac{1}{2} M_0 (e^{hk} - 1) (\delta(k) - r_I J_1(r_I k)) \\ \tilde{I}(k) &= -\frac{1}{2} M_0 (e^{-hk} - 1) (\delta(k) - r_I J_1(r_I k))\end{aligned}$$

Estas funciones siempre se utilizarán en integrales que tienen funciones de Bessel de primera especie, las cuales se anulan en el origen. El delta de Dirac presente en la función anterior hará que se

evalúe el integrando en el origen, el cual al incluir estas funciones de Bessel se anulará. Por tanto el delta de Dirac no contribuye y lo eliminamos de las expresiones anteriores:

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{2}r_I M_0 (e^{hk} - 1) J_1(r_I k) \quad (2.2.9)$$

$$\tilde{I}(k) = \frac{1}{2}r_I M_0 (e^{-hk} - 1) J_1(r_I k) \quad (2.2.10)$$

Usando estos resultados en (2.2.6) y (2.2.7):

$$\tilde{H}(k) = -\frac{1}{2}r_I M_0 J_1(r_I k) \quad (2.2.11)$$

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{2}r_I M_0 e^{-hk} J_1(r_I k) \quad (2.2.12)$$

### 2.2.3. Campo en una coordenada arbitraria $(\rho, z)$

Usando los resultados (2.2.9),(2.2.10),(2.2.11) y (2.2.12) en (2.2.4) , se obtiene la expresión final para el campo magnético  $B_z(\rho, z)$

$$B_z(\rho, z) = \frac{1}{2}\mu_0 M_0 \begin{cases} r_I \int_0^{\infty} (e^{hk} - 1) e^{-kz} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk & , z \geq h \\ -r_I \int_0^{\infty} (e^{-kz} + e^{k(z-h)}) J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk & , 0 < z < h, \rho > r_I \\ 2 - r_I \int_0^{\infty} (e^{-kz} + e^{k(z-h)}) J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk & , 0 < z < h, \rho \leq r_I \\ -r_I \int_0^{\infty} (e^{-hk} - 1) e^{kz} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk & , z \leq 0 \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Cuando el imán está desplazado una distancia  $x$  del origen, la coordenada de observación  $z$  de esta expresión corresponde para la ecuación (2.2.13) a  $z^*$  como aparece en la figura 2.2. Para referir estas expresiones de campo al sistema de coordenadas no desplazado, debe hacerse  $z^* = z - x$ . Para las ecuaciones de movimiento del imán, note que la variable dinámica es  $x$ , entonces la relación de velocidades está dada por:

$$\dot{z} = -\dot{x} \quad (2.2.14)$$

Con las consideraciones anteriores (2.2.13) se transforma en:

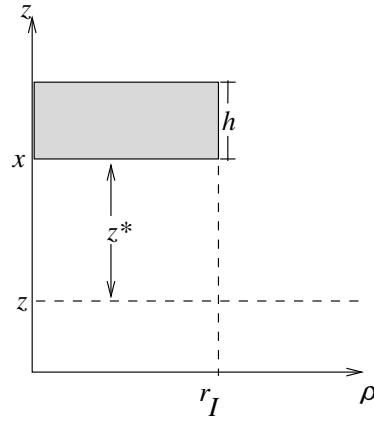


Figura 2.2: Coordenadas para un imán fuera del origen

con  $K(k, r_I, \rho) = J_1(r_I k) J_0(k \rho)$

$$B_z(\rho, z) = \frac{1}{2} \mu_0 M_0 \begin{cases} r_I \int_0^\infty (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} K(k, r_I, \rho) dk & , z \geq x + h \\ -r_I \int_0^\infty (e^{k(x-z)} + e^{k(z-h-x)}) K(k, r_I, \rho) dk & , x < z < x + h, \rho > r_I \\ 2 - r_I \int_0^\infty (e^{k(x-z)} + e^{k(z-h-x)}) K(k, r_I, \rho) dk & , x < z < x + h, \rho \leq r_I \\ -r_I \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} K(k, r_I, \rho) dk & , z \leq x \end{cases} \quad (2.2.15)$$

### 2.3. Fuerza en un imán debida a un segundo imán

Ahora bien, la fuerza ejercida por un campo magnético externo  $\mathbf{B}_e$  en un imán está dada por la expresión [37]:

$$\mathbf{F} = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{M}) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) d^3x + \oint_S (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) da$$

En este caso, el campo magnético aplicado es el emanado por otro imán diferente.

Definiendo la situación como se muestra en la [figura 2.3](#), establecemos que los imanes 0 y 1 tienen magnetizaciones axiales  $M_0$  y  $M_1$ , respectivamente. Por lo tanto, solamente el término de superficie contribuye:

$$\mathbf{F} = \oint_S (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) da \quad (2.3.1)$$

De forma análoga al cálculo del campo magnético, las caras superior e inferior del cilindro son las únicas que suman, por las mismas razones que allí se exponen (ver [sección 2.2](#)). Teniendo esto en

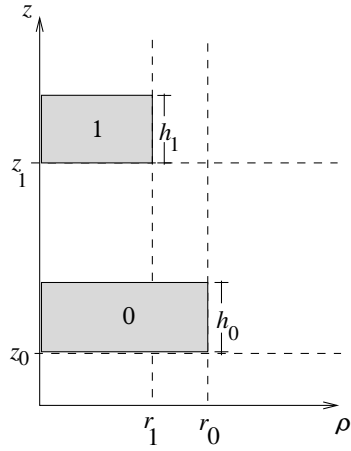


Figura 2.3: Dos imanes, sección transversal axi-simétrica

cuenta:

$$F_z = -M_1 \left( \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) d\theta \rho d\rho \Big|_{z=z_1+h_1} - \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) d\theta \rho d\rho \Big|_{z=z_1} \right)$$

El campo  $\mathbf{B}_e$  en estas integrales es el campo magnético producido por el imán 0, dado en (2.2.15) con  $x = z_0$ , siendo  $z_0$  la posición del mismo en el sistema de coordenadas. Cuando la configuración de los imanes es tal que para las integrales del imán 1 el campo  $\mathbf{B}_e$  está dado por la expresión que aplica para la región superior del imán 0 (es decir, en el caso  $z_0 + h_0 < z_1$ ), se tiene:

$$F_z(z_0, z_1) = \pi \mu_0 M_0 M_1 r_0 \left( \int_0^{r_1} \int_0^{\infty} (e^{h_0 k} - 1) e^{k(z_0 - z)} J_1(r_0 k) J_0(k \rho) dk \Big|_{z=z_1} \rho d\rho - \int_0^{r_1} \int_0^{\infty} (e^{h_0 k} - 1) e^{k(z_0 - z)} J_1(r_0 k) J_0(k \rho) dk \Big|_{z=z_1+h_1} \rho d\rho \right)$$

Intercambiando las integrales:

$$F_z(z_0, z_1) = \pi \mu_0 M_0 M_1 r_0 \left[ \int_0^{\infty} (e^{h_0 k} - 1) e^{k(z_0 - z)} J_1(r_0 k) \left( \int_0^{r_1} J_0(k \rho) \rho d\rho \right) dk \Big|_{z=z_1} - \int_0^{\infty} (e^{h_0 k} - 1) e^{k(z_0 - z)} J_1(r_0 k) \left( \int_0^{r_1} J_0(k \rho) \rho d\rho \right) dk \Big|_{z=z_1+h_1} \right]$$

La integral en  $\rho$  resulta sencilla y el resultado es:

$$F_z(z_0, z_1) = \pi \mu_0 M_0 M_1 r_0 r_1 \left[ \int_0^{\infty} (e^{h_0 k} - 1) e^{k(z_0 - z_1)} \left( \frac{J_1(k r_0) J_1(k r_1)}{k} \right) dk - \int_0^{\infty} (e^{h_0 k} - 1) e^{k(z_0 - z_1 - h_1)} \left( \frac{J_1(k r_0) J_1(k r_1)}{k} \right) dk \right] \quad (2.3.2)$$

Por su parte, en el caso en que el imán 0 esté encima del imán 1 (es decir, en el caso  $z_0 > z_1 + h_1$ ), la fuerza se puede calcular intercambiando  $z_0 \leftrightarrow z_1$  y  $h_0 \leftrightarrow h_1$  en la ecuación (2.3.2).

## 2.4. Inducción Electromagnética

En esta sección estudiamos dos fenómenos:

- La inducción de voltaje en la bobina debido al movimiento relativo del imán móvil respecto a la misma.
- La fuerza de amortiguamiento ejercida por la bobina en el imán móvil debido al campo magnético generado por su corriente inducida.

### 2.4.1. Voltaje inducido en una bobina

En la [figura 2.4](#) se define la geometría de la situación, para una bobina de longitud  $L$ , una densidad  $\eta$  de  $N$  espiras por unidad de longitud y radio  $r_B$  que contiene a un imán de grosor  $h$ , radio  $r_I$  y magnetización remanente axial constante  $M_0$ . En la geometría presente, se fija la condición  $r_B > r_I$ .

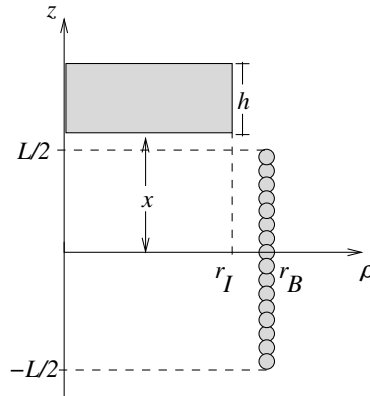


Figura 2.4: Un imán y una bobina, sección transversal axi-simétrica

Partimos de la ley de Faraday en forma integral, para un circuito de forma fija  $C$  cuya normal  $\mathbf{n}$  está orientada en el eje  $z$  ( $\mathbf{n} = \hat{z}$ ):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da = - \int_S \frac{\partial B_z}{\partial t} da$$

donde  $\mathbf{B}$  es el campo magnético producido por el imán, y  $C$  es una espira de la bobina. La variación del campo magnético está dada por el movimiento del imán a través de la relación (2.2.14):

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \dot{z} = - \frac{\partial B_z}{\partial z} \dot{x}$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \dot{x} \int_S \frac{\partial B_z}{\partial z} da \\
 &= \dot{x} \int_0^{r_B} \int_0^{2\pi} \frac{\partial B_z}{\partial z} d\theta \rho d\rho \\
 &= 2\pi \dot{x} \int_0^{r_B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \rho d\rho
 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (2.2.15), vemos la necesidad de tratar por separado las tres regiones del espacio exterior del campo magnético del imán cilíndrico.

■ Para  $z \geq x + h$ :

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi \dot{x} \int_0^{r_B} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \mu_0 M_0 r_I \int_0^{\infty} (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
 &= \pi \mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{r_B} \left( \int_0^{\infty} (e^{hk} - 1) \frac{\partial}{\partial z} e^{k(x-z)} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
 &= -\pi \mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{r_B} \left( \int_0^{\infty} k (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
 &= -\pi \mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{\infty} k (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} J_1(r_I k) \left( \int_0^{r_B} J_0(k\rho) \rho d\rho \right) dk \\
 &= -\pi \mu_0 M_0 r_I r_B \dot{x} \int_0^{\infty} (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk
 \end{aligned}$$

- Para  $x < z < x + h$  (con  $\rho > r_I$ ):

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi\dot{x} \int_0^{r_B} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{2}\mu_0 M_0 r_I \int_0^\infty (e^{k(x-z)} + e^{k(z-h-x)}) J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{r_B} \left( \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} (e^{k(x-z)} + e^{k(z-h-x)}) J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{r_B} \left( \int_0^\infty k (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^\infty k (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) J_1(r_I k) \left( \int_0^{r_B} J_0(k\rho) \rho d\rho \right) dk \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I r_B \dot{x} \int_0^\infty (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk
\end{aligned}$$

- Para  $z \leq x$ :

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi\dot{x} \int_0^{r_B} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{2}\mu_0 M_0 r_I \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{r_B} \left( \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^{r_B} \left( \int_0^\infty k (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_0(k\rho) dk \right) \rho d\rho \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I \dot{x} \int_0^\infty k (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) \left( \int_0^{r_B} J_0(k\rho) \rho d\rho \right) dk \\
&= -\pi\mu_0 M_0 r_I r_B \dot{x} \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk
\end{aligned}$$

En resumen:

con  $\alpha = -\pi\mu_0 M_0 r_I r_B$  :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \alpha\dot{x} \begin{cases} \int_0^\infty (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk & , z \geq x + h \\ \int_0^\infty (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk & , x < z < x + h \\ \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk & , z \leq x \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Las expresiones anteriores generan la fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  inducida por el imán móvil, en una sola espira. Por tanto, la fuerza electromotriz total estará dada por la expresión:

$$\mathcal{E} = \eta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} dz = \eta \int_{-L/2}^{L/2} \left( \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) dz \rightarrow \eta \int_a^b \left( \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) dz$$

Los puntos  $a$  y  $b$  dependen de la posición instantánea  $x$  del imán, pues existen varios casos que hay que considerar para efectuar el cálculo correctamente. Se enumeran y describen los casos a continuación:

1. Cuando  $x > L/2$ :

En este caso, la bobina está completamente comprendida dentro de la región inferior del campo magnético del imán ( $z \leq x$ ). Por tanto,  $a = -L/2$  y  $b = L/2$  con el integrando perteneciente a la región  $z \leq x$ .

2. Cuando  $x + h > L/2$  y  $-L/2 < x < L/2$ :

En este caso, la bobina está dividida en las regiones inferior e intermedia del campo magnético del imán. Entonces se deben calcular las integrales de estas dos regiones, con límites de integración  $(a, b) = (-L/2, x)$  y  $(a, b) = (x, L/2)$  con los integrandos  $z \leq x$  y  $x \leq z \leq x + h$ , respectivamente.

3. Cuando  $x < -L/2$  y  $-L/2 < x + h < L/2$ :

En este caso, la bobina está dividida en las regiones superior e intermedia del campo magnético del imán. Así, se deben calcular las integrales de estas dos regiones, con límites de integración  $(a, b) = (-L/2, x+h)$  y  $(a, b) = (x+h, L/2)$  con los integrandos  $x \leq z \leq x+h$  y  $z > x+h$ , respectivamente.

4. Cuando  $x + h < -L/2$ :

En este caso, la bobina está completamente comprendida dentro de la región superior del campo magnético del imán ( $z > h$ ). Por tanto,  $a = -L/2$  y  $b = L/2$  con el integrando perteneciente a la región  $z > x + h$ .

Existe un caso adicional, que depende de la relación entre  $L$  y  $h$ , que es cuando el imán se encuentra completamente dentro de la bobina. En este caso, sucede lo siguiente:

1. Si  $L > h$ :

Entonces  $x \geq -L/2$  y  $x + h \leq L/2$  y la bobina está dividida en todas las regiones del campo magnético del imán. Por tanto se deben calcular las integrales de estas tres regiones, con límites de integración  $(a, b) = (-L/2, x)$ ,  $(a, b) = (x, x + h)$  y  $(a, b) = (x + h, L/2)$  con los integrandos  $z \leq x$ ,  $x \leq z \leq x + h$  y  $z > x + h$ , respectivamente.

2. Si  $L \leq h$ :

Entonces  $x \leq -L/2$  y  $x + h \geq L/2$  y la bobina está inmersa en la región intermedia del campo magnético del imán. Los límites de integración para esta región ( $x \leq z \leq x + h$ ) serían  $(a, b) = (-L/2, L/2)$ .

Caso	Situación	Límites $(a, b)$ en región:		
		$z < x$	$x \leq z \leq x + h$	$z > x + h$
1	$x \geq \frac{L}{2}$	$(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$	-	-
2	$-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ y $x + h > \frac{L}{2}$	$(-\frac{L}{2}, x)$	$(x, \frac{L}{2})$	-
3	$-\frac{L}{2} < x + h < \frac{L}{2}$ y $x < -\frac{L}{2}$	-	$(-\frac{L}{2}, x + h)$	$(x + h, \frac{L}{2})$
4	$x + h \leq -\frac{L}{2}$	-	-	$(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$
5. Imán inmerso en bobina, $L > h$				
5.1	$x + h \leq \frac{L}{2}$ y $x \geq -\frac{L}{2}$	$(-\frac{L}{2}, x)$	$(x, x + h)$	$(x + h, \frac{L}{2})$
5. Imán inmerso en bobina, $L \leq h$				
5.2	$x + h \geq \frac{L}{2}$ y $x \leq -\frac{L}{2}$	-	$(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$	-

Tabla 2.1: Límites de integración para los casos de inducción en la bobina

Resumimos las consideraciones anteriores en la tabla 2.1. Con estas, procedemos a calcular las expresiones correspondientes. Para reducir el cálculo, hacemos primero las integraciones para límites arbitrarios  $a, b$  de los resultados de la ecuación (2.4.1), para luego evaluarlas en los casos expuestos en la tabla 2.1:

- Para  $z \geq x + h$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \eta \int_a^b \left( \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) dz \\
&= \eta \int_a^b \left( -\alpha \dot{x} \int_0^\infty (e^{hk} - 1) e^{k(x-z)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \right) dz \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_0^\infty (e^{hk} - 1) \left( \int_a^b e^{k(x-z)} dz \right) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_0^\infty (e^{hk} - 1) \frac{e^{k(x-a)} - e^{k(x-b)}}{k} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk
\end{aligned}$$

- Para  $x < z < x + h$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \eta \int_a^b \left( \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) dz \\
&= \eta \int_a^b \left( -\alpha \dot{x} \int_0^\infty (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \right) dz \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_a^b \left( \int_0^\infty (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \right) dz \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_0^\infty \left( \int_a^b (e^{k(z-h-x)} - e^{k(x-z)}) dz \right) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_0^\infty \frac{e^{-k(x+h)} (e^{bk} - e^{ak}) + e^{k(x-b)} - e^{k(x-a)}}{k} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk
\end{aligned}$$

- Para  $z \leq x$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \eta \int_a^b \left( \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) dz \\
&= \eta \int_a^b \left( -\alpha \dot{x} \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \right) dz \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_a^b \left( \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) e^{k(z-x)} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \right) dz \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) \left( \int_a^b e^{k(z-x)} dz \right) J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk \\
&= -\alpha \eta \dot{x} \int_0^\infty (e^{-hk} - 1) \frac{e^{-kx} (-e^{ak} + e^{bk})}{k} J_1(r_I k) J_1(r_B k) dk
\end{aligned}$$

Aplicando los límites de la [tabla 2.1](#) obtenemos las expresiones finales dadas en la [tabla 2.2](#). Este voltaje inducido  $\mathcal{E}$  generará una corriente inducida  $I_{\text{ind}}$  dada por:

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{bob}} + R_{\text{carga}}} \quad (2.4.2)$$

Donde  $R_{\text{bob}}$  es la resistencia de la bobina y  $R_{\text{carga}}$  es la carga conectada a la bobina, que modela el dispositivo que se va a alimentar con el generador que estamos diseñando. Al establecerse esa corriente inducida en la bobina, ésta producirá un campo magnético concentrado principalmente en el interior de la misma, el cual tendrá el papel de establecer un mecanismo de amortiguamiento

Caso	Expresión
	con $\alpha = \pi\mu_0 M_0 r_I r_B \eta$ y $w(k, r_I, r_B) = k^{-1} J_1(r_I k) J_1(r_B k)$
1	$\alpha \dot{x} \int_0^{\infty} e^{-k(x+h+L/2)} (e^{hk} - 1) (e^{kL} - 1) w(k, r_I, r_B) dk$
2	$\alpha \dot{x} \int_0^{\infty} [2 - e^{-k(x+h+L/2)} (-1 + e^{hk} + e^{kL} + e^{k(h+2x)})] w(k, r_I, r_B) dk$
3	$\alpha \dot{x} \int_0^{\infty} [e^{-k(x+h+L/2)} (1 + e^{2k(h+x)} - e^{k(h+2x)} + e^{k(h+L+2x)}) - 2] w(k, r_I, r_B) dk$
4	$-\alpha \dot{x} \int_0^{\infty} e^{-k(L/2-x)} (e^{hk} - 1) (e^{kL} - 1) w(k, r_I, r_B) dk$
5	$\alpha \dot{x} \int_0^{\infty} e^{-k(x+h+L/2)} (e^{\min(h,L)k} - 1) (e^{k(h+2x)} - 1) w(k, r_I, r_B) dk$

Tabla 2.2: Expresiones para la fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  en cada caso de ubicación del imán cilíndrico móvil

que reducirá la velocidad del imán a su paso por el interior de la bobina. Este mecanismo es fundamentalmente una consecuencia de la conservación de energía, pues, de no existir, una excitación instantánea del sistema haría que este produzca una cantidad infinita de energía. La siguiente tarea es entonces calcular el campo magnético generado y la fuerza que éste tiene sobre el imán.

## 2.4.2. Campo y Fuerza Magnética producida por una bobina

Este modelado se hace con base en la [figura 2.4](#). Al existir corrientes aplicadas, el mejor método de proceder es calculando el potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$  y calcular los observables a través de la relación  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Nuevamente invocamos la discusión de [37] para nuestro punto de partida, dado por la ecuación:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (2.4.3)$$

donde se debe expresar la densidad de corriente aplicada  $\mathbf{J}$  en coordenadas cartesianas para poder emplear esta expresión. Para esta geometría, solo existe una corriente aplicada en dirección azimutal, dada por:

$$J_\phi(\mathbf{x}') = \eta I r_B \delta(\rho' - r_B) \Pi(z', -L/2, L/2)$$

$$\text{con } \Pi(z, a, b) = \begin{cases} 1 & a \leq z \leq b \\ 0 & d.l.c. \end{cases}$$

Expresamos nuestra densidad de corriente aplicada total como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = -J_\phi \sin \phi' \hat{x} + J_\phi \cos \phi' \hat{y}$$

Por la simetría axial, definimos el plano de observación en  $\phi = 0$  para el cálculo. Como la integral (2.4.3) es simétrica alrededor de  $\phi' = 0$ , la componente  $x$  no contribuirá, dejando solamente la

componente  $y$ , que corresponde a la componente azimutal  $A_\phi$ . Es decir,  $\mathbf{A} = A_\phi \hat{\phi}$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
A_\phi(\rho, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_\phi(\mathbf{x}') \cos \phi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \eta I r_B \int \frac{\delta(\rho' - r_B) \Pi(z', -L/2, L/2) \cos \phi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \eta I r_B \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\cos \phi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dz' d\phi' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \eta I r_B \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\cos \phi'}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + r_B^2 - 2\rho r_B \cos \phi'}} dz' d\phi' \\
A_\phi(\rho, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \eta I r_B \int_0^{2\pi} f(\rho, z, L, r_B, \phi') - f(\rho, z, -L, r_B, \phi') d\phi' \tag{2.4.4}
\end{aligned}$$

$$\text{con } f(\rho, z, L, r_B, \phi') = \log \left( L + 2z + \sqrt{L^2 + 4Lz + 4(r_B^2 + z^2 + \rho^2) - 8r_B \rho \cos \phi'} \right)$$

El resultado dado en la expresión anterior no puede ser expresado en forma cerrada, por lo cual se necesita recurrir, como hasta ahora, a una integración unidimensional finita por cada punto en el que se desee obtener el valor del potencial vectorial. Las componentes de campo magnético se obtienen a través de la relación fundamental antes mencionada, por medio de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
B_\rho &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\
B_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi)
\end{aligned}$$

Sin embargo para nuestro propósito no es necesario obtener expresiones explícitas para estos campos, pues lo que nos interesa es la fuerza magnética ejercida en el imán, en la dirección  $z$ . En este

caso, empleamos la ecuación (2.3.1):

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \oint_S (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) da \\
&= \int_{\text{C. superior}} (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) da - \int_{\text{C. inferior}} (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})) \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) da \\
F_z &= M_0 \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{r_I} \rho B_z(\mathbf{x}) \Big|_{z=x+h} d\rho d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^{r_I} \rho B_z(\mathbf{x}) \Big|_{z=x} d\rho d\phi \right) \\
&= 2\pi M_0 \left( \int_0^{r_I} \rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \right) \Big|_{z=x+h} d\rho - \int_0^{r_I} \rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \right) \Big|_{z=x} d\rho \right) \\
&= 2\pi M_0 \left( \int_0^{r_I} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \Big|_{z=x+h} d\rho - \int_0^{r_I} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \Big|_{z=x} d\rho \right) \\
&= 2\pi M_0 [(\rho A_\phi)(r_I, x+h) - (\rho A_\phi)(0, x+h) - (\rho A_\phi)(r_I, x) + (\rho A_\phi)(0, x)] \\
F_z &= 2\pi M_0 r_I [A_\phi(r_I, x+h) - A_\phi(r_I, x)] \tag{2.4.5}
\end{aligned}$$

Para evaluar  $A_\phi(\rho, z)$  se debe emplear la expresión (2.4.4).

## 2.5. Una transformación para el cálculo numérico

Las expresiones presentadas en la tabla 2.2 y las ecuaciones (2.2.15) y (2.3.2) están dadas en términos de integrales infinitas altamente oscilatorias (debido al producto de dos funciones de Bessel), lo cual puede hacer difícil y/o inexacto su cómputo. Más aún, en algunas pruebas con estas integrales sucede que la integración numérica para ciertos valores de los parámetros falla y se va a infinito, aun cuando es claro que estas integrales siempre convergen para valores positivos de los parámetros (lo cual en nuestro caso siempre aplica).

Para mejorar esto, vamos a transformar estas integrales infinitas en unas finitas equivalentes. Considere la integral:

$$A_\nu^{(\mu)}(a, b, c) = \int_0^\infty e^{-ak} J_1(bk) J_\nu(ck) k^\mu dk \tag{2.5.1}$$

Nos interesan los casos  $\mu = 0$  y  $\mu = -1$ . Usando una de las múltiples representaciones integrales de las funciones de Bessel, dadas en [38]:

$$\begin{aligned}
A_\nu^{(\mu)}(a, b, c) &= \int_0^\infty e^{-ak} J_1(bk) \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ick \sin \theta - i\nu \theta} d\theta \right) k^\mu dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\nu \theta} \int_0^\infty e^{-(a-ic \sin \theta)k} J_1(bk) k^\mu dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\nu \theta} \mathcal{H}_1 \{ e^{-(a-ic \sin \theta)k} k^{\mu-1} \} \tag{2.5.2}
\end{aligned}$$

Con  $\mathcal{H}_1$  la transformada de Hankel de orden 1 de  $k$  en  $b$ . Esta transformada particular es una función elemental para los casos  $\mu = 0$  y  $\mu = -1$ :

$$A_\nu^{(\mu)}(a, b, c) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\nu\theta} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{b^2}{(a - ic \operatorname{sen} \theta)^2} \right)^{-1/2} \right] & , \mu = 0 \\ \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\nu\theta} (a - ic \operatorname{sen} \theta) \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{(a - ic \operatorname{sen} \theta)^2}} \right] & , \mu = -1 \end{cases}$$

Una prueba de la paridad respecto a  $\theta$  del integrando en (2.5.2) revela que éste es periódico con periodo  $2\pi$ , que su parte real será par mientras que su parte imaginaria será impar. Por lo tanto, la integral siempre resultará real, y se puede explotar esta simetría para reducir el intervalo de integración:

$$A_\nu^{(\mu)}(a, b, c) = \begin{cases} \frac{1}{\pi b} \int_0^\pi d\theta e^{-i\nu\theta} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{b^2}{(a - ic \operatorname{sen} \theta)^2} \right)^{-1/2} \right] & , \mu = 0 \\ \frac{1}{\pi b} \int_0^\pi d\theta e^{-i\nu\theta} (a - ic \operatorname{sen} \theta) \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{(a - ic \operatorname{sen} \theta)^2}} \right] & , \mu = -1 \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Un caso especial es  $A_1^{(-1)}(0, b, c)$ :

$$A_1^{(-1)}(0, b, c) = \begin{cases} \frac{c}{2b} & b > c \\ \frac{b}{2c} & b < c \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Con la definición (2.5.1) y los resultados (2.5.3), (2.5.4) podemos expresar todos los observables que hemos calculado. El campo magnético producido por un imán cilíndrico, dado por la expresión (2.2.15) hace uso del caso  $\mu = 0$ , y las formulas dadas en la tabla 2.2 y la ecuación (2.3.2) se recalculan usando el caso  $\mu = -1$ . Se efectúan estas manipulaciones a continuación:

- El campo magnético producido por un imán cilíndrico:

$$B_z(\rho, z) = \frac{1}{2} \mu_0 M_0 \begin{cases} r_I \left( A_0^{(0)}(z - x - h, r_I, \rho) - A_0^{(0)}(z - x, r_I, \rho) \right) & z \geq x + h \\ -r_I \left( A_0^{(0)}(z - x, r_I, \rho) + A_0^{(0)}(x + h - z, r_I, \rho) \right) & x < z < x + h, \rho > r_I \\ 2 - r_I \left( A_0^{(0)}(z - x, r_I, \rho) + A_0^{(0)}(x + h - z, r_I, \rho) \right) & x < z < x + h, \rho \leq r_I \\ -r_I \left( A_0^{(0)}(x + h - z, r_I, \rho) - A_0^{(0)}(x - z, r_I, \rho) \right) & z \leq x \end{cases} \quad (2.5.5)$$

- La fuerza de un imán cilíndrico debido al campo magnético de otro:

con  $\beta = \pi \mu_0 M_0 M_1 r_0 r_1$  :

$$F_z(z_0, z_1) = \beta \begin{cases} \left( A_1^{(-1)}(z_1 - z_0, r_0, r_1) + A_1^{(-1)}(z_1 - h_0 - z_0, r_0, r_1) \right. \\ \left. + A_1^{(-1)}(h_1 + z_1 - z_0, r_0, r_1) - A_1^{(-1)}(-h_0 + h_1 + z_1 - z_0, r_0, r_1) \right) & , z_1 > z_0 + h_0 \\ \left( A_1^{(-1)}(-z_1 + z_0, r_0, r_1) - A_1^{(-1)}(-z_1 + h_0 + z_0, r_0, r_1) \right. \\ \left. - A_1^{(-1)}(-h_1 - z_1 + z_0, r_0, r_1) + A_1^{(-1)}(h_0 - h_1 - z_1 + z_0, r_0, r_1) \right) & , z_0 > z_1 + h_1 \end{cases} \quad (2.5.6)$$

- El voltaje inducido en una bobina debido al movimiento de un imán cilíndrico: Dado en la tabla 2.3.

## 2.6. Sistema dinámico

En este punto ya todos los efectos relevantes han sido incluidos, con lo cual se pueden escribir ecuaciones diferenciales en el tiempo y calcular respuestas frecuenciales, potencias generadas, etc. La ecuación que gobierna el sistema es:

$$m_{\text{iman}}\ddot{x} = F_{If1} + F_{If2} + F_{Ib} - D_{\text{mec}}\dot{x} + F_{\text{ext}}(t) \quad (2.6.1)$$

Con  $F_{\text{ext}}(t)$  la fuerza externa aplicada a la estructura,  $F_{If1}$  dado en (2.3.2) en el primer caso,  $F_{If2}$  dado en la misma expresión para el segundo caso,  $F_{Ib}$  dado por (2.4.5) y  $D_{\text{mec}}$  representa el amortiguamiento mecánico debido a fricción entre el imán móvil y el resto de la estructura. Esta ecuación realiza el acople entre los movimientos corporales y la generación eléctrica que se produce en la estructura.

Caso	Expresión
	con $\alpha = \pi\mu_0 M_0 r_I r_B \eta$
1	$\alpha\dot{x} \left( A_1^{(-1)}(x+h+L/2, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(x+L/2, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(x+h-L/2, r_I, r_B) + A_1^{(-1)}(x-L/2, r_I, r_B) \right)$
2	$\alpha\dot{x} \left( \frac{r_I}{r_B} - A_1^{(-1)}(x+L/2, r_I, r_B) + A_1^{(-1)}(x+h+L/2, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(x+h-L/2, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(L/2-x, r_I, r_B) \right)$
3	$\alpha\dot{x} \left( A_1^{(-1)}(x+h+L/2, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(x+L/2, r_I, r_B) + A_1^{(-1)}(L/2-x-h, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(L/2-x, r_I, r_B) \right)$
4	$\alpha\dot{x} \left( -\frac{r_I}{r_B} + A_1^{(-1)}(x+h+L/2, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(L/2-x, r_I, r_B) + A_1^{(-1)}(L/2-x-h, r_I, r_B) + A_1^{(-1)}(-L/2-x, r_I, r_B) \right)$
5	$\alpha\dot{x} \left( A_1^{(-1)}(L/2-x-h, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(-(L/2+x+h), r_I, r_B) + A_1^{(-1)}(-L/2-x, r_I, r_B) - A_1^{(-1)}(L/2-x, r_I, r_B) \right)$

Tabla 2.3: Expresiones para la fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  en cada caso de ubicación del imán cilíndrico móvil

# Capítulo 3

## Simulación del Generador

En este capítulo mostramos algunas simulaciones del modelo desarrollado en el [capítulo 2](#), donde se observan las entradas y salidas del mismo, con miras a establecer el procedimiento de cálculo de la geometría óptima del dispositivo de este trabajo. Todo el trabajo con el modelo se implementó en el software *MATLAB R2008a*, disponible en la Universidad.

Iniciamos mostrando cálculos de cantidades estáticas, como los campos magnéticos de los imanes y la bobina, con el fin de poder comparar el modelo contra los resultados del software *COMSOL Multiphysics*. Después mostramos simulaciones transientes que permiten visualizar el comportamiento del generador simulado ante diversas excitaciones.

### 3.1. Simulaciones Estáticas

En este aparte mostramos resultados del cálculo de los siguientes observables estáticos:

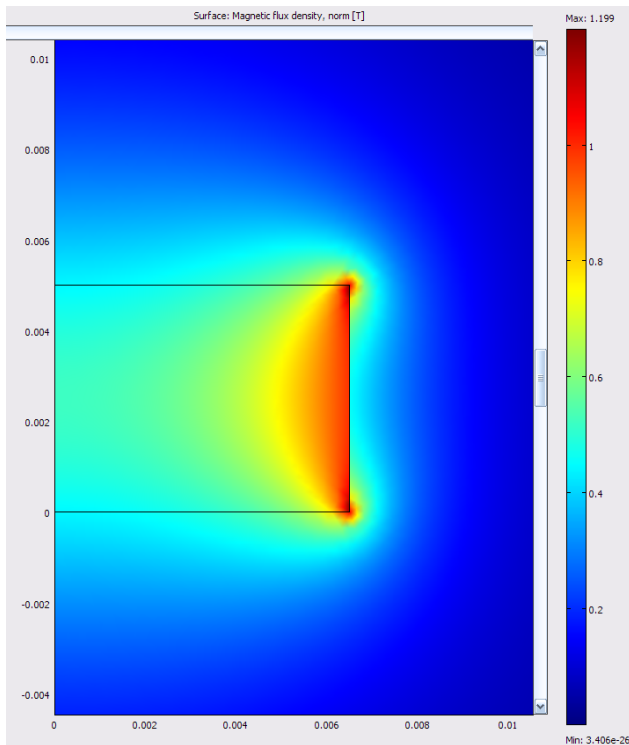
- [Campo magnético emanado por un imán cilíndrico 3.1.1.](#)
- [Campo magnético producido por una corriente en una bobina 3.1.2.](#)
- [Fuerza magnética entre dos imanes cilíndricos 3.1.3](#)

#### 3.1.1. Campo magnético emanado por un imán cilíndrico

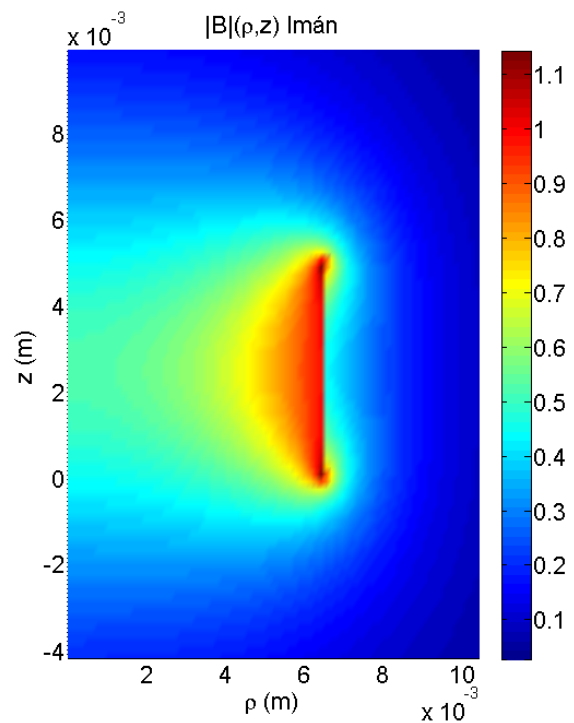
A manera de ilustración, el campo magnético producido por un imán cilíndrico cuya magnetización remanente es constante y axialmente orientada, se observa en la [figura 3.1](#) un gráfico de densidad la magnitud del campo magnético, generado por ambos métodos (modelo en *MATLAB* y simulación de *COMSOL*). Como se puede observar, la forma y las magnitudes del gráfico son muy similares, y efectivamente, punto a punto las diferencias entre ambos cálculos tienen un error relativo de 0.1 %, significando un satisfactorio acuerdo entre los dos métodos.

#### 3.1.2. Campo magnético producido por una corriente estacionaria en una bobina

De igual manera mostramos los resultados de ambos métodos para la magnitud del campo magnético generado por una corriente estacionaria en una bobina cilíndrica de una sola capa de espiras de grosor despreciable. La [figura 3.1](#) presenta los gráficos de densidad correspondientes. Igual que antes, el resultado muestra un satisfactorio error relativo de 0.1 %, salvo en los puntos



(a) por COMSOL



(b) por Modelamiento

Figura 3.1: Campo magnético emanado por un imán cilíndrico

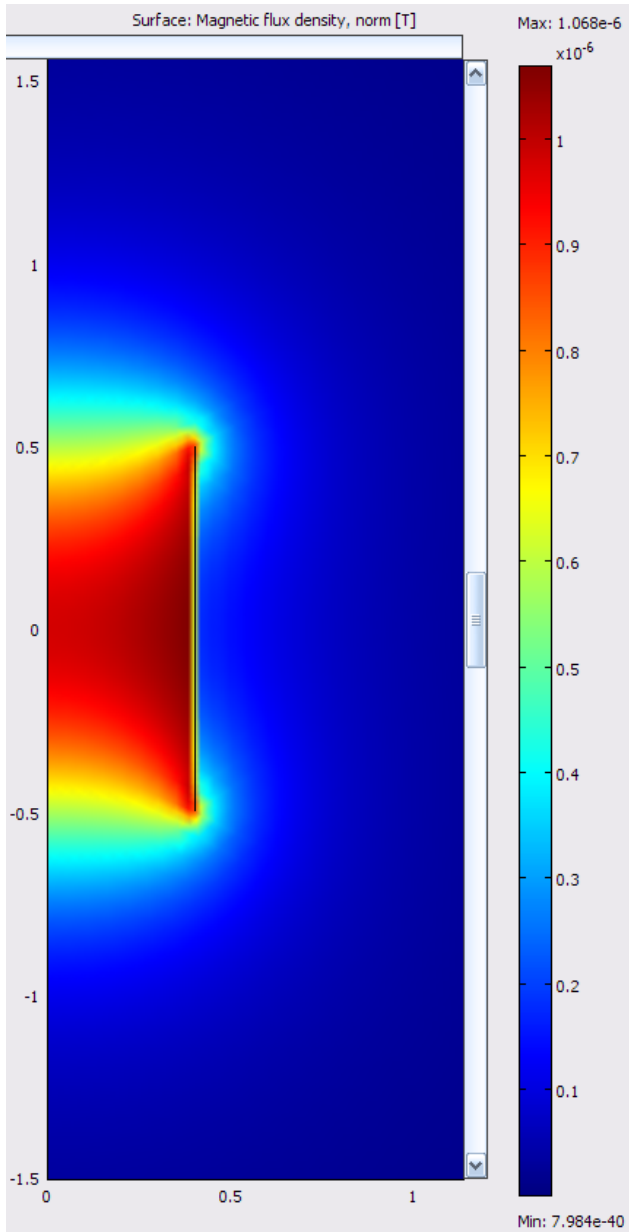
no visibles del gráfico generado en *MATLAB*, donde las integrales numéricas no convergen. Sin embargo, todos los puntos se encuentran en el eje  $\rho = r_B$  (siendo  $r_B$  el radio de la bobina), y en referencia a la ecuación (2.4.5), para las simulaciones este eje nunca es evaluado.

### 3.1.3. Fuerza magnética entre dos imanes cilíndricos

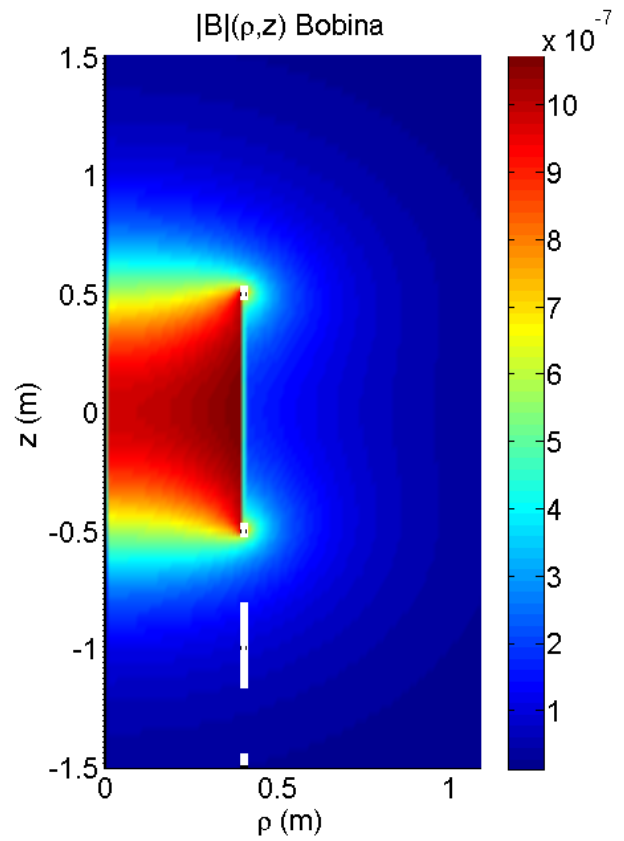
En este caso el acuerdo entre ambos cálculos no es tan favorable como en las instancias anteriores. Con ambos métodos se simularon dos imanes de 6.5 mm de radio, 5 mm de grosor y magnetización remanente axial de 1 MA/m, alineados axialmente, con una distancia entre sus caras enfrentadas de 1 cm. La situación se muestra en la figura 3.3. Las dos fuerzas que se calculan son la fuerza ejercida en 1 por 2 y su recíproca. En la tabla 3.1 se muestran los resultados de ambos métodos. Es notorio el hecho que el resultado de *COMSOL* tiende al resultado del modelo conforme crece el detalle enmallado (y con esto, el costo computacional de la solución), pero aún así, presenta una discrepancia fundamental con la tercera Ley de Newton, por la cual toda fuerza ejercida en un cuerpo genera una de igual magnitud en sentido opuesto.

## 3.2. Simulaciones Dinámicas

Ahora presentamos simulaciones transientes del generador ante diferentes excitaciones. Estas simulaciones no tienen comparación con *COMSOL Multiphysics*, pues no fue posible emplearlo para este fin, debido a una serie de inconvenientes técnicos al intentar implementarlas en el mismo, principalmente relacionados con el tratamiento de una simulación donde tanto la geometría del problema como el enmallado de la misma cambian en cada paso de tiempo de la solución.



(a) por COMSOL



(b) por Modelamiento

Figura 3.2: Campo magnético generado por una corriente en una bobina cilíndrica

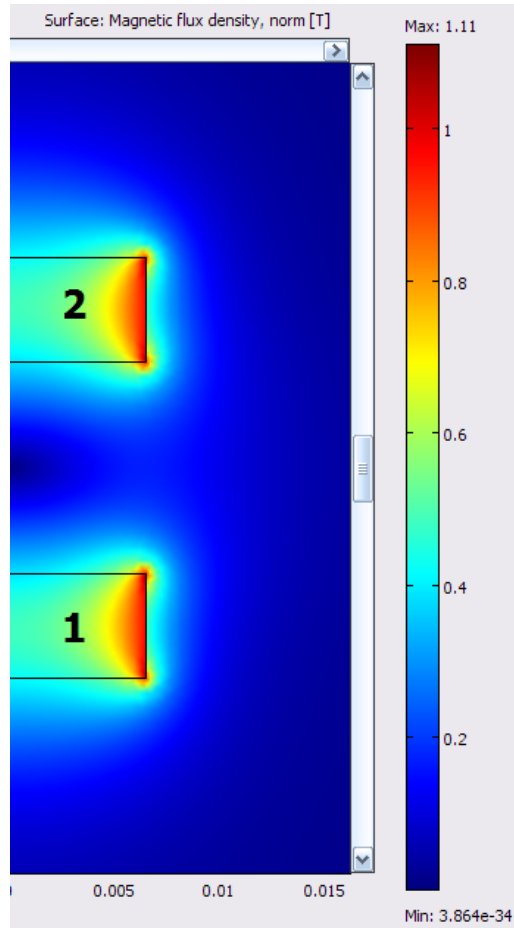


Figura 3.3: Dos imanes cilíndricos enfrentados para el cálculo de la fuerza magnética de repulsión mutua

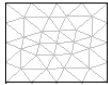
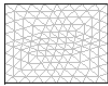
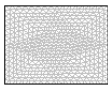
Enmallado	COMSOL [N]	Modelo [N]
	1 → 2: 3.41 2 → 1: -3.5792	
	1 → 2: 3.5522 2 → 1: -3.6645	1 → 2: 3.7427 2 → 1: -3.7427
	1 → 2: 3.6329 2 → 1: -3.7027	

Tabla 3.1: Comparación de resultados de la fuerza magnética de repulsión mutua entre dos imanes

El conjunto de parámetros que se pueden explorar en estas simulaciones es amplio: los parámetros geométricos de la bobina y de los imanes, los parámetros intrínsecos de los mismos, las excitaciones. Sin embargo, consideramos que el más representativo de todos para ilustrar aquí es el efecto del amortiguamiento mecánico. En las figuras 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 se observará cómo el amortiguamiento mecánico afecta sensiblemente la operación del generador. Para destacar es el

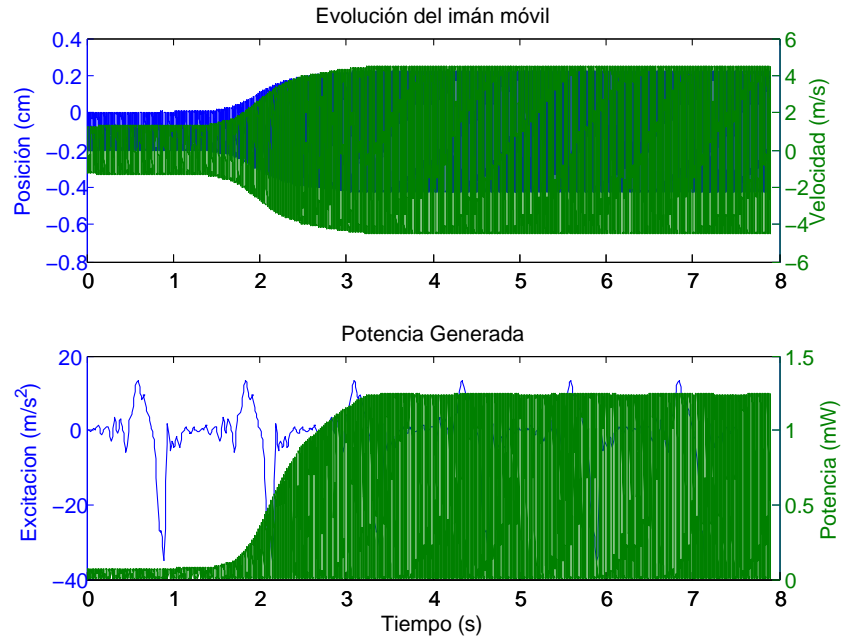


Figura 3.4: Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento =  $0 \text{ s}^{-1}$

hecho que en ausencia de fricción (el caso de la figura 3.4) el generador entra en resonancia y genera continuamente energía. En los demás casos, se observa que el rozamiento hace que la generación sea un fenómeno que decae, requiriéndose de varias series de pasos para crear más sucesiones de picos de potencia generada.

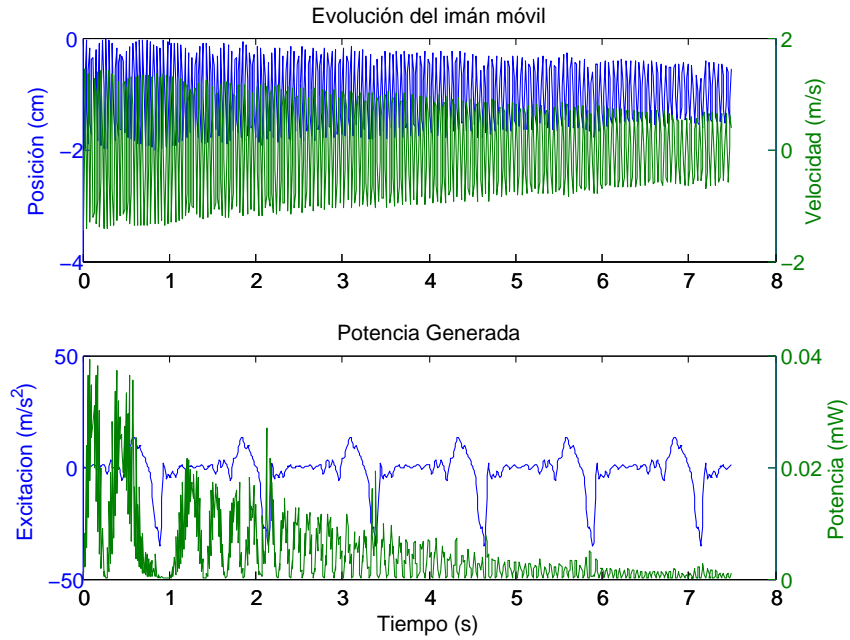


Figura 3.5: Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento =  $0.2 \text{ s}^{-1}$

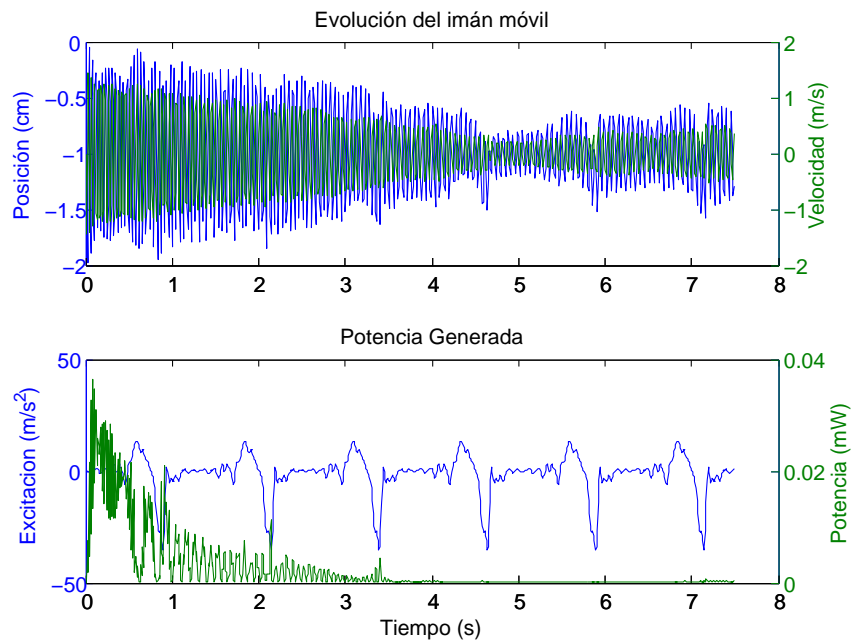


Figura 3.6: Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento =  $0.5 \text{ s}^{-1}$

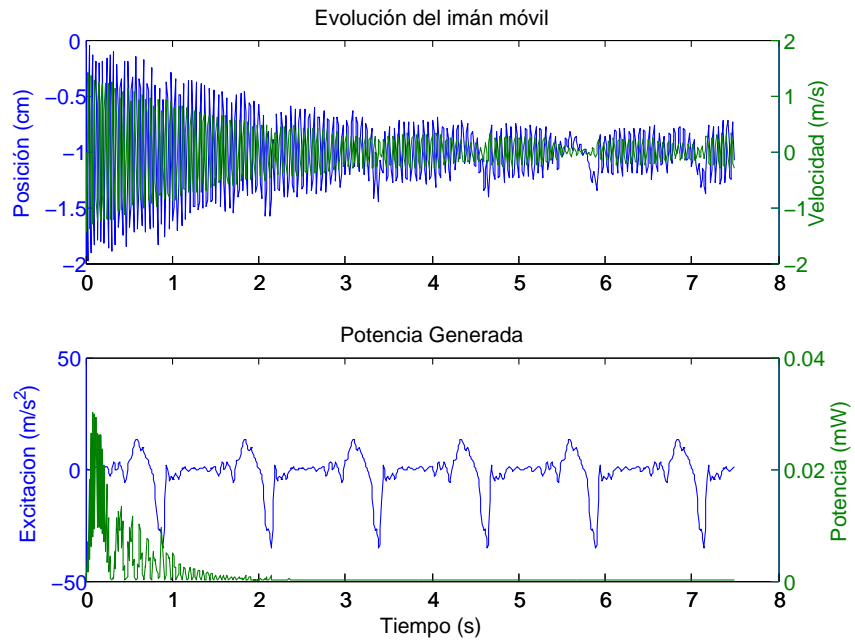


Figura 3.7: Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento =  $1 \text{ s}^{-1}$

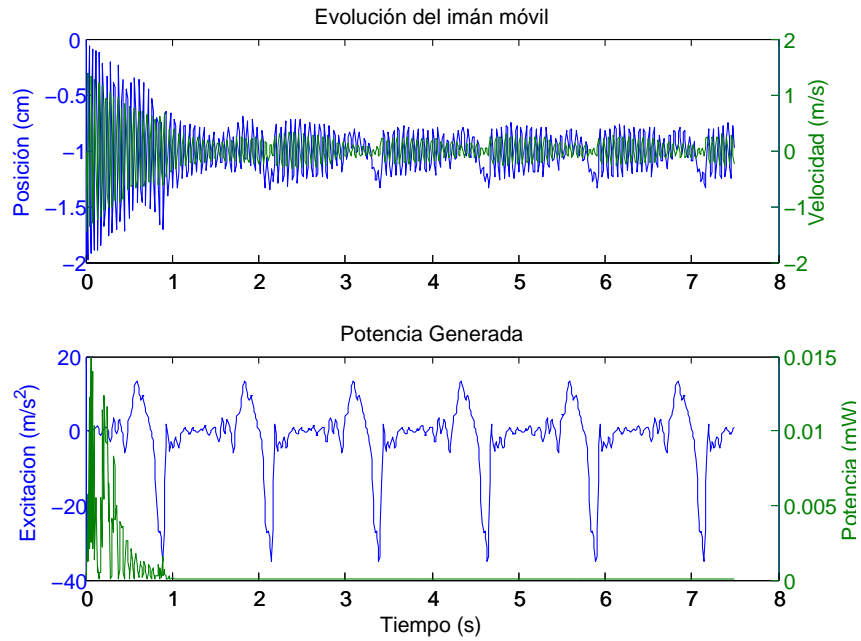


Figura 3.8: Respuesta transiente ante una serie de pasos a marcha normal, amortiguamiento =  $2 \text{ s}^{-1}$

# Capítulo 4

## Montajes Experimentales del Proyecto

### 4.1. Análisis de Movimientos Corporales

Para calibrar los parámetros del generador es necesario conocer muy bien las características del tipo de movimiento ante el cual va a someterse la estructura: niveles de aceleración, periodicidad, formas de onda. Así mismo, es importante estudiar las aceleraciones en distintas partes del cuerpo para compararlas y poder establecer una jerarquía de potencial de generación para las distintas partes del cuerpo.

#### 4.1.1. Captura Óptica Especializada

En la actualidad existen equipos dedicados a la captura de movimientos corporales, normalmente empleados con propósitos médicos, tales como estudiar anomalías en la marcha de un paciente causadas por problemas articulares o motores, establecer desbalances en el uso de la musculatura para la marcha, etc. Estos equipos se componen de un arreglo de cámaras infrarrojas distribuidas alrededor de un espacio vacío que es el espacio de medición de marcha, las cuales se conectan a un sistema computacional dedicado al procesamiento de las imágenes resultantes, extrayendo de las mismas datos de posición en el tiempo. Estas cámaras detectan las reflexiones de una serie de marcadores esféricos altamente reflectivos que se ubican en las zonas del paciente cuyo movimiento durante la marcha se desea capturar.

El ensamble de captura de marcha específico que se empleó para este fin es fabricado por la empresa *eMotion S.r.l.*, configurado por seis cámaras de video (infrarrojo), un hub de conexiones de video y un computador dedicado a la captura. La frecuencia de muestreo del sistema (frecuencia de captura de imágenes de las cámaras) es de 100 Hz, lo cual excede por un margen cómodo el rango típico de frecuencia de los movimientos humanos ([0, 20] Hz aproximadamente). La precisión del sistema es de  $\pm 0.5$  mm, según arrojan las estadísticas de la calibración efectuada al inicio de la sesión de captura. El espacio de captura es una pista de 3 m de longitud. Este sistema se encuentra en el Laboratorio de Biomecánica Digital de la Universidad Manuela Beltrán.

Para la sesión de captura se ubicaron marcadores reflectivos en las siguientes partes del cuerpo, que son las que se estimaron con mayor movilidad durante la marcha, lo cual implica mayor potencial de generación:

- Punta del Pie
- Rodilla
- Cadera

- Hombro
- Codo
- Muñeca

Estas capturas se realizaron para las siguientes movimientos corporales

- Caminata lenta
- Caminata a paso normal
- Caminata presurosa
- Trote
- Carrera

Por cada movimiento se efectuaron 9 repeticiones, para disminuir la incertidumbre del perfil típico de cada movimiento. Los datos obtenidos de esta sesión se pueden visualizar en un software gráfico muy amigable proveído por la empresa fabricante del ensamble de captura, el cual también dispone de métodos sencillos para hacer interpolación de los datos, cálculo de velocidades, aceleraciones, fuerzas, potencias, etc. En la figura 4.1 se muestra una serie de fotogramas generados por el software gráfico al procesar los datos generados en la sesión de captura. Los fotogramas mostrados corresponden a una marcha a ritmo “normal”, i.e., sin intento de fijar una velocidad o estilo de movimiento particulares. En las figuras 4.2 y 4.3 mostramos las velocidades y aceleraciones calculadas en cada uno de los movimientos ejecutados. Con estas gráficas se pueden conocer los perfiles de estos movimientos y las relaciones de orden entre los mismos (respecto a magnitudes de aceleración y velocidad).

A partir de estas capturas, una figura de potencial de generación fue calculada de la siguiente forma: la potencia mecánica usada en mover una masa puntual cumple con  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ , con  $\mathbf{F}$  la fuerza ejercida en la misma y  $\mathbf{v}$  su velocidad. A partir de los datos de posición en el tiempo (representados por el vector  $\mathbf{x}$ ), podemos estimar estas dos cantidades a partir de las relaciones  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{F} = \ddot{\mathbf{x}}$ , asignando una masa unitaria a cada parte por simplicidad, dado que, bajo la suposición de que nuestro generador tendrá una masa muy pequeña comparada con la de cualquiera de las partes analizadas en la captura, no es necesario tener más detalles sobre esta masa. Entonces tenemos que  $P = \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}$ . El resultado se presenta en la figura 4.4, donde se observa que los mejores sitios para ubicar el generador son la punta del pie, el talón y la rodilla. Allí se muestra el valor RMS de la potencia mecánica ejercida en cada lugar, para cada actividad física. Dado que el generador cuando esté instalado será una carga adicional para los músculos, la potencia extraída por el dispositivo debe ser una pequeña fracción de la ejercida. Por tanto, el generador debe instalarse en el sitio donde se ejerza la mayor potencia, para que ese factor de “sobrecarga” en el sitio de instalación sea el más pequeño posible.

#### 4.1.2. Captura Inercial Inalámbrica

Previo a esta captura óptica de datos, se intentó implementar una unidad inercial de posicionamiento, construida con 3 acelerómetros triaxiales ADXL330 de Analog Devices, un microcontrolador PIC 16F876A de Microchip y un par de transceptores RF XBee de Digi International, efectuando la captura y procesamiento de datos en el software *LabView* de National Instruments. La idea fundamental en la operación de la unidad se trata de medir las aceleraciones lineales en

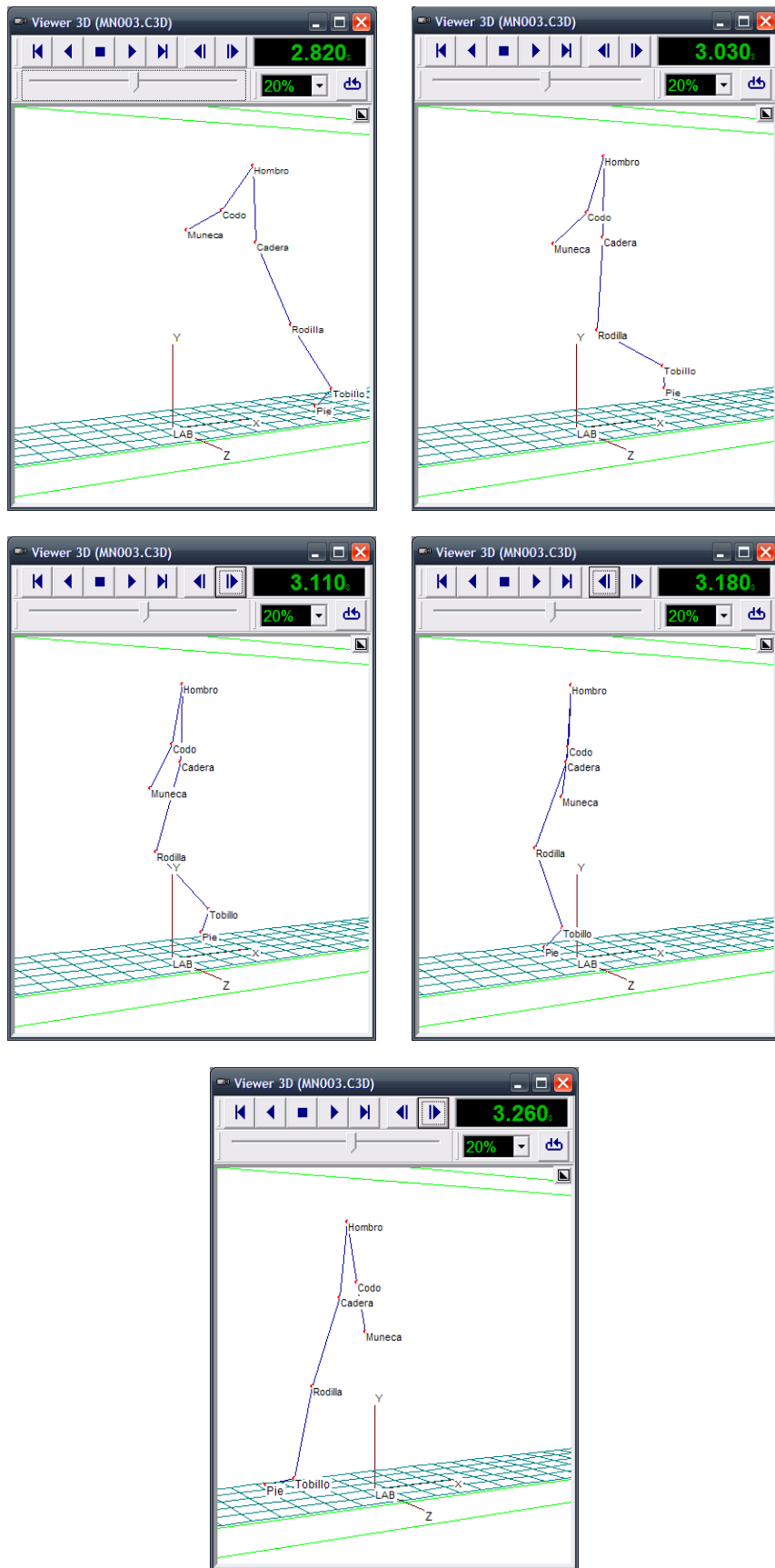
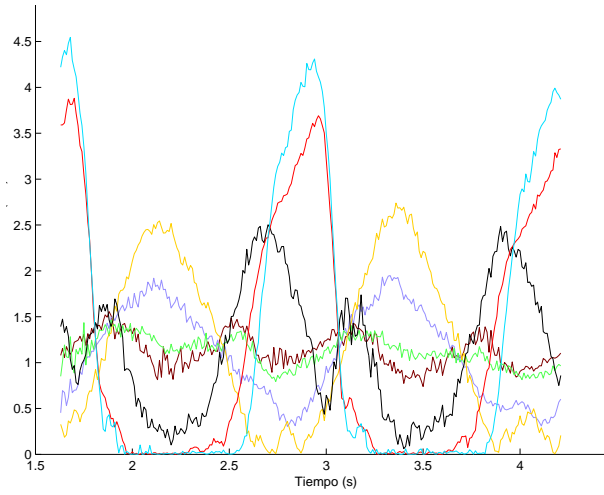
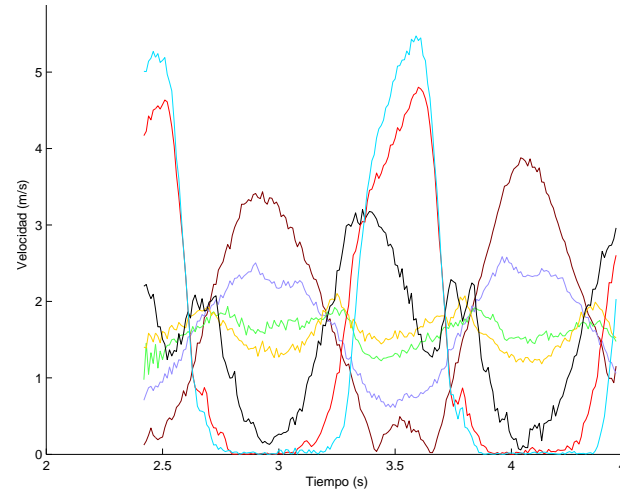


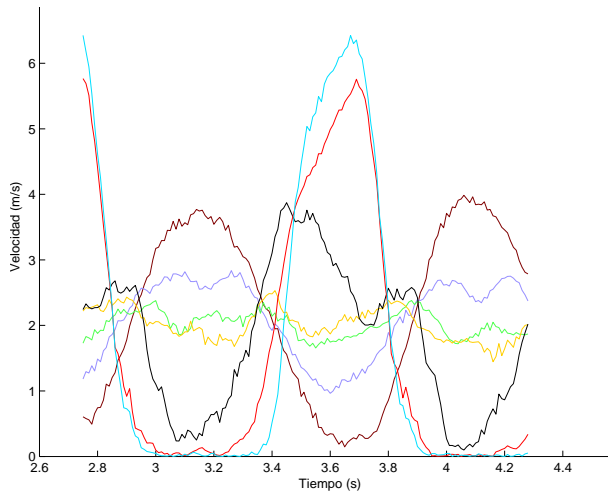
Figura 4.1: Fotografías de la animación generada por el software de los datos de la captura



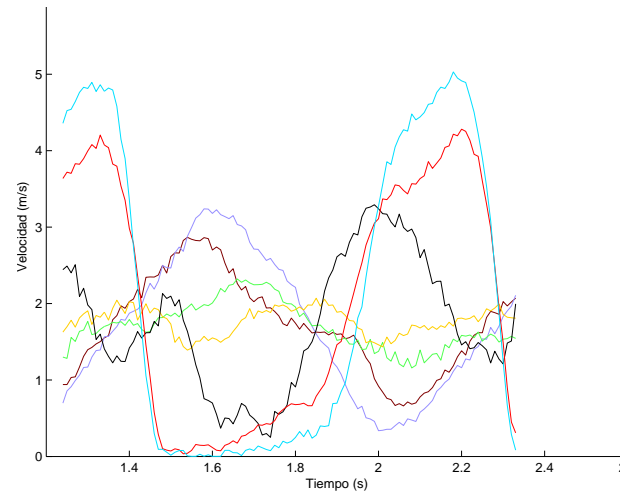
(a) Velocidad en Marcha Lenta



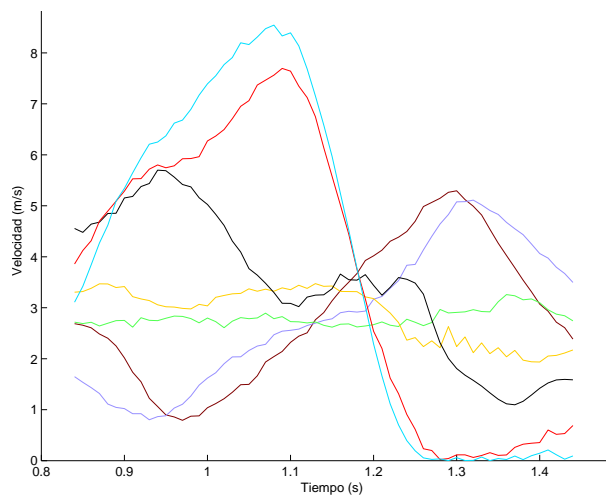
(b) Velocidad en Marcha Normal



(c) Velocidad en Marcha Apresurada



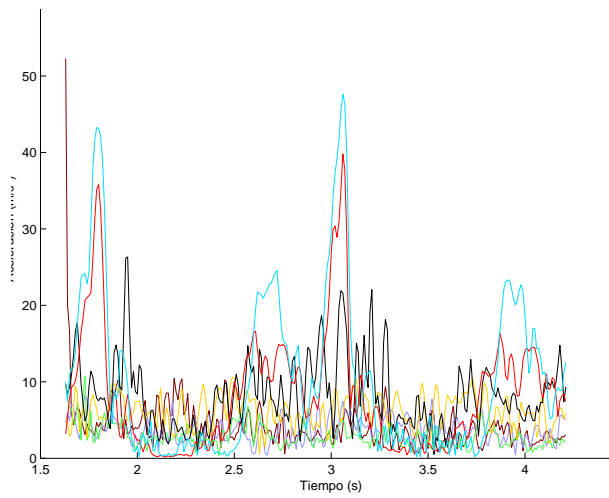
(d) Velocidad en Trote



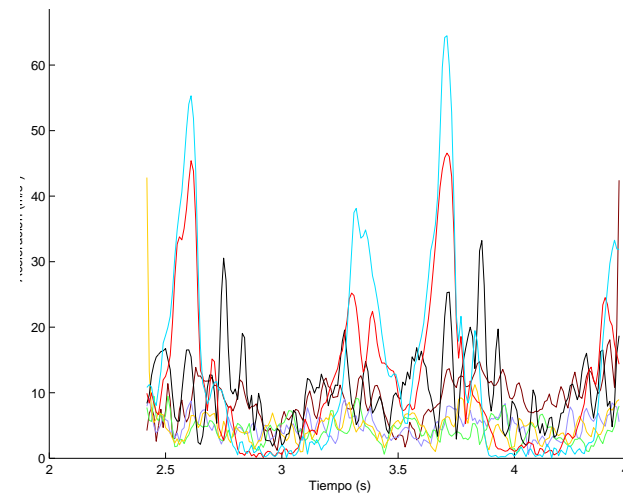
(e) Velocidad en Carrera



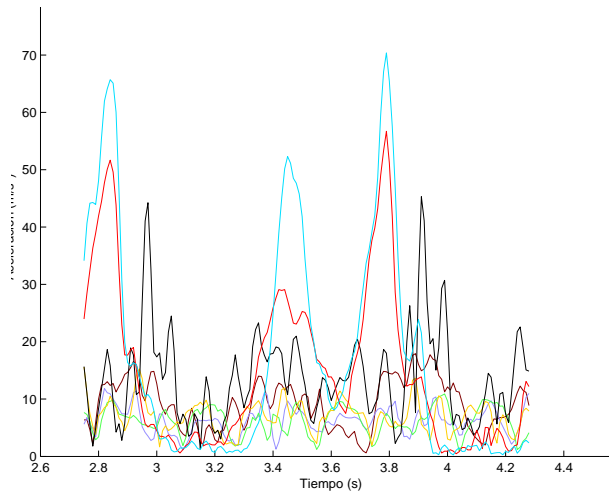
Figura 4.2: Magnitud de la velocidad en cada punto observado, para cada movimiento



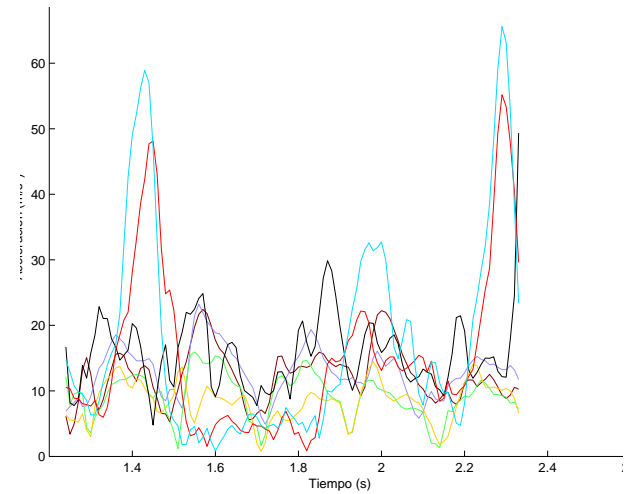
(a) Aceleración en Marcha Lenta



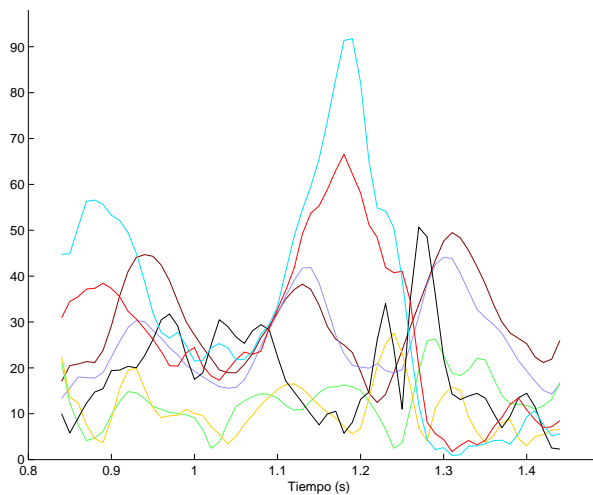
(b) Aceleración en Marcha Normal



(c) Aceleración en Marcha Apesurada



(d) Aceleración en Trote



(e) Aceleración en Carrera

Figura 4.3: Magnitud de la aceleración en cada punto observado, para cada movimiento, durante un ciclo de marcha

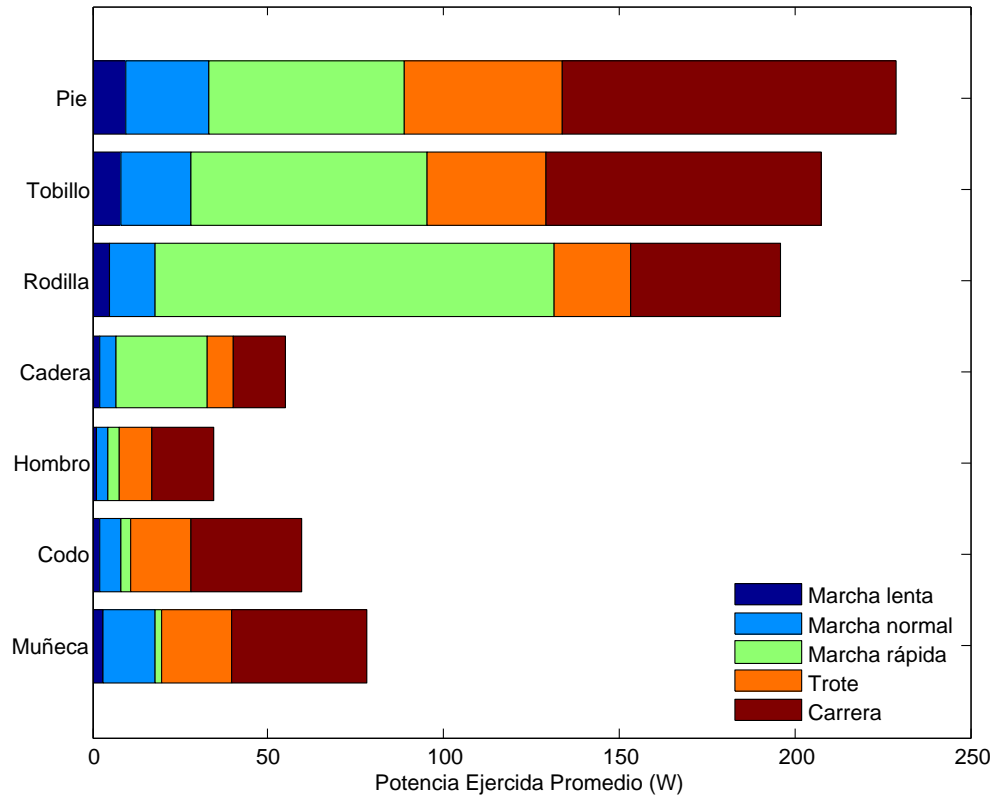


Figura 4.4: Comparación de potencias generadas en cada miembro por cada movimiento, durante un ciclo de marcha

varios puntos de un cuerpo rígido (el montaje de la unidad) y efectuar operaciones de doble integración para obtener la velocidad y la posición del desplazamiento. El intento falló debido al error de offset variable en el tiempo en la salida de los acelerómetros, lo cual al efectuar la operación de integración generaba un error que crecía como  $t^3$ , haciendo el esquema poco confiable. En la figura 4.5 se muestra la construcción del experimento.

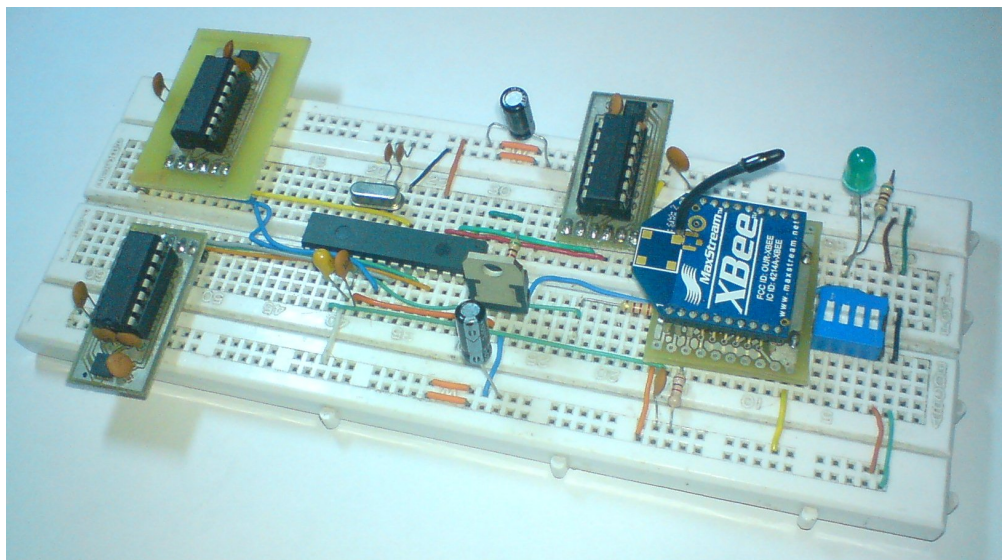


Figura 4.5: Unidad Inercial de Posicionamiento implementada en una tarjeta de prototipado

## 4.2. Validación Experimental del Generador

La validación experimental del generador requiere medir el voltaje generado por el mismo aplicado a una resistencia de carga, la cual emulará la resistencia de entrada del circuito de adaptación que debe estar asociado a este generador. Esta medición debe hacerse *in situ*, es decir, en alguno de los dos zapatos de la persona que pruebe el generador. Por tanto, una solución alámbrica no es apropiada, y se optó por emplear nuevamente los módulos transceptores XBee, aprovechando su ADC incorporado. Las figuras 4.6 y 4.7 muestran los diagramas esquemáticos de estos circuitos, mientras que su implementación se muestra en la figura 4.8. En el circuito del AD620, la referencia LF356 es un amplificador operacional de bajo offset, que es usado aquí como generador de voltaje de referencia variable (por medio del potenciómetro de 100k $\Omega$ ). El dispositivo ICL7660 es un inversor de voltaje que genera alimentación bipolar para los dos amplificadores del circuito a partir de una sola fuente, lo cual permite el uso de este circuito con baterías. Los dos puentes removibles (o *jumpers*) JP1 y JP2 permiten escoger los caminos de retorno de las corrientes de polarización de las entradas del AD620, que como se muestra en [39], pueden ser diferentes dependiendo del tipo de la fuente de la señal que se está amplificando. Este circuito puede parecer sobredimensionado respecto a los requerimientos de nuestra aplicación. Sin embargo, dado que los componentes son de bajo costo, el diseño puede aumentarse ligeramente para acomodar casos distintos de uso y así hacerlo más versátil, aprovechando mejor los recursos que dispone. Respecto del circuito del transceptor XBee, se trata de un regulador de voltaje de salida fija a 3.3V de baja caída (LDO), con conectores Molex de dos pines (tierra y señal) que van a cada uno de los puertos de entrada del ADC incorporado en el transceptor. En el extremo receptor, conectado al computador que

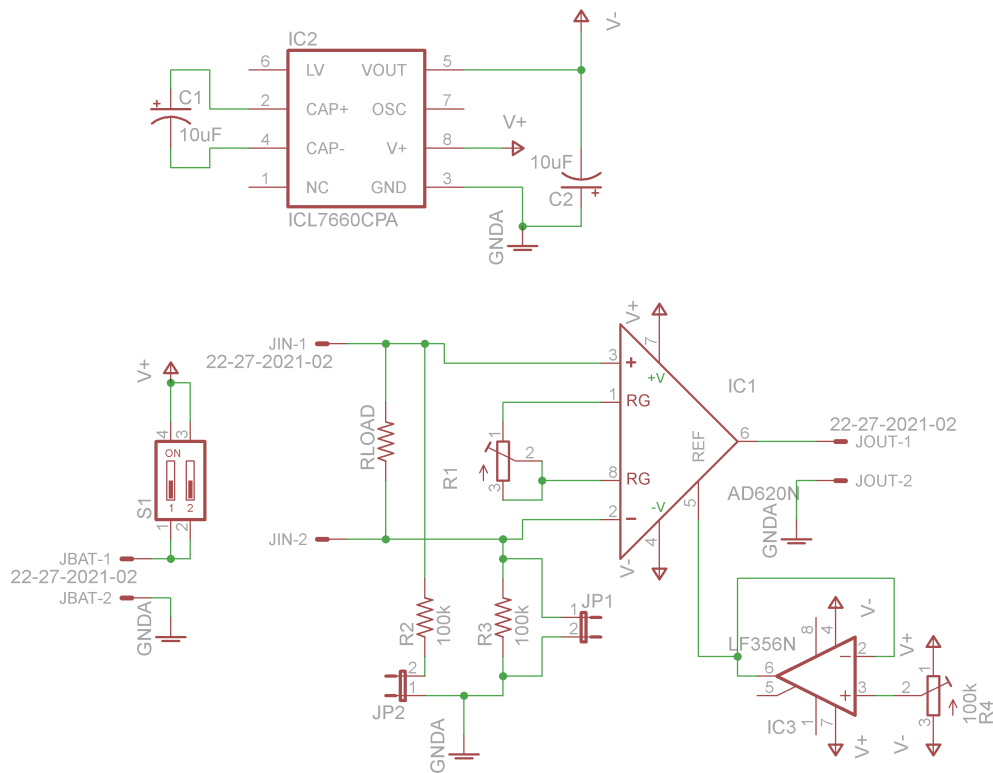


Figura 4.6: Diagrama Esquemático del circuito del Amplificador de Instrumentación AD620

efectúa la adquisición de datos, se encuentra otro transceptor XBee conectado a un convertidor serial  $\leftrightarrow$  USB FT232. El manejo de los datos y su procesamiento se efectúa, igual que se hizo con

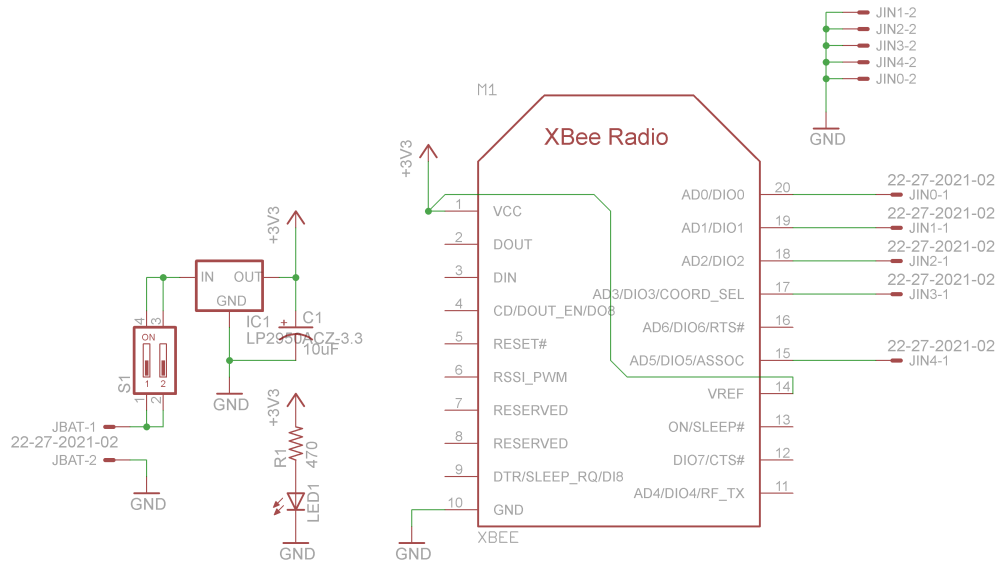


Figura 4.7: Diagrama Esquemático del circuito del transceptor RF Xbee

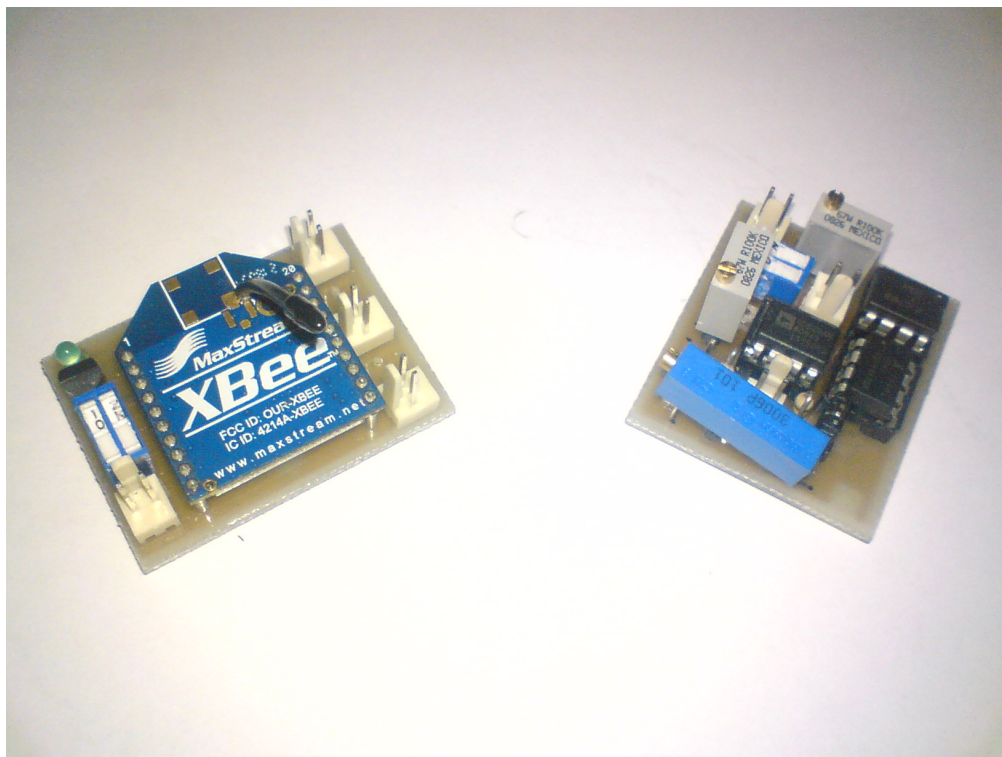


Figura 4.8: Fotografía de los dos circuitos fabricados

la Unidad Inercial de Posicionamiento, en *LabView*. En la figura 4.9 se muestra la interfaz gráfica implementada, mientras que en la figura 4.10 se presenta el principal bloque de programación de la aplicación. En la figura 4.11 mostramos una fotografía del generador implementado, y otra del montaje completo, fijado por medio de una banda de Velcro a un zapato para los experimentos

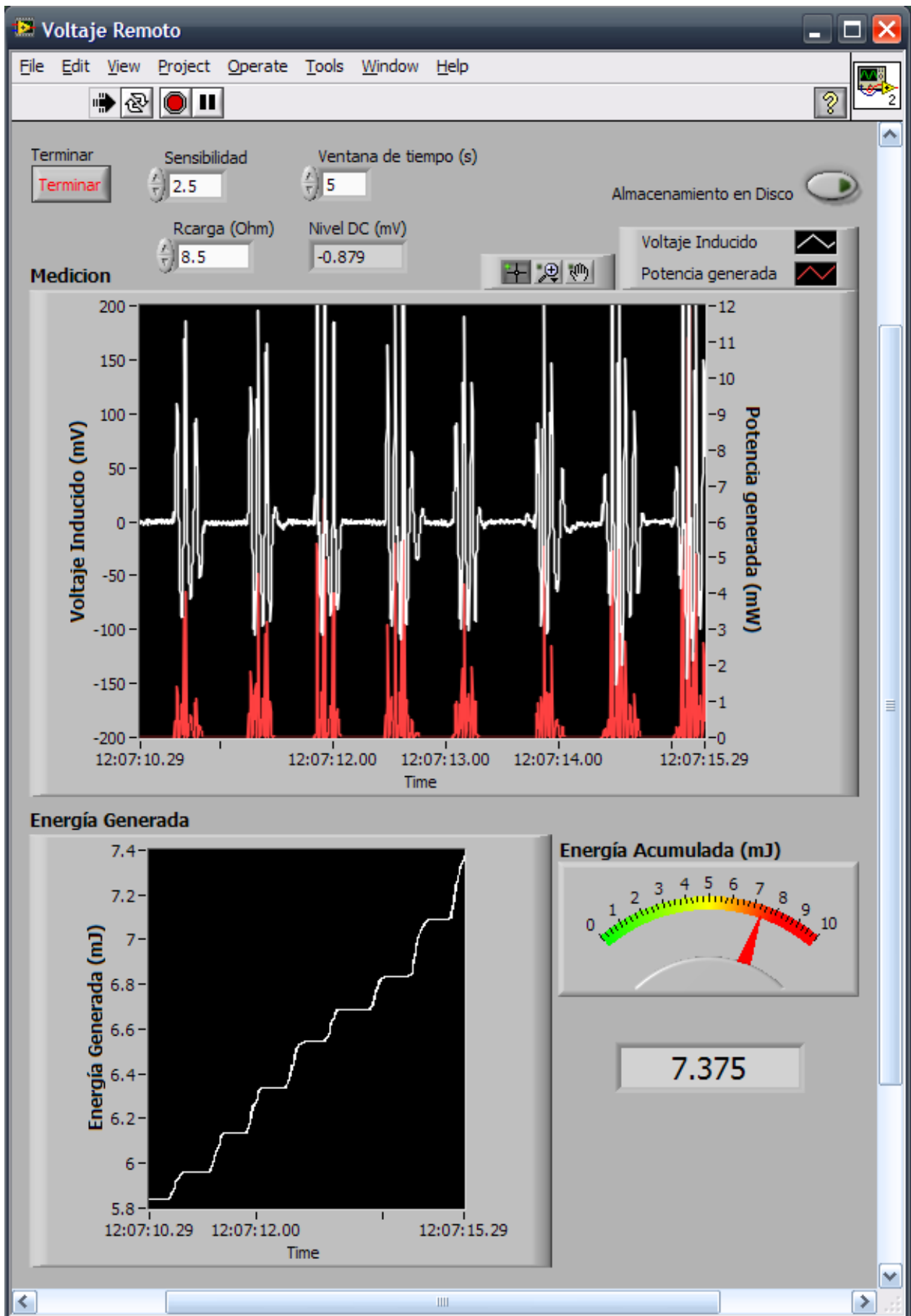


Figura 4.9: Interfaz Gráfica de la aplicación de adquisición de datos en LabView

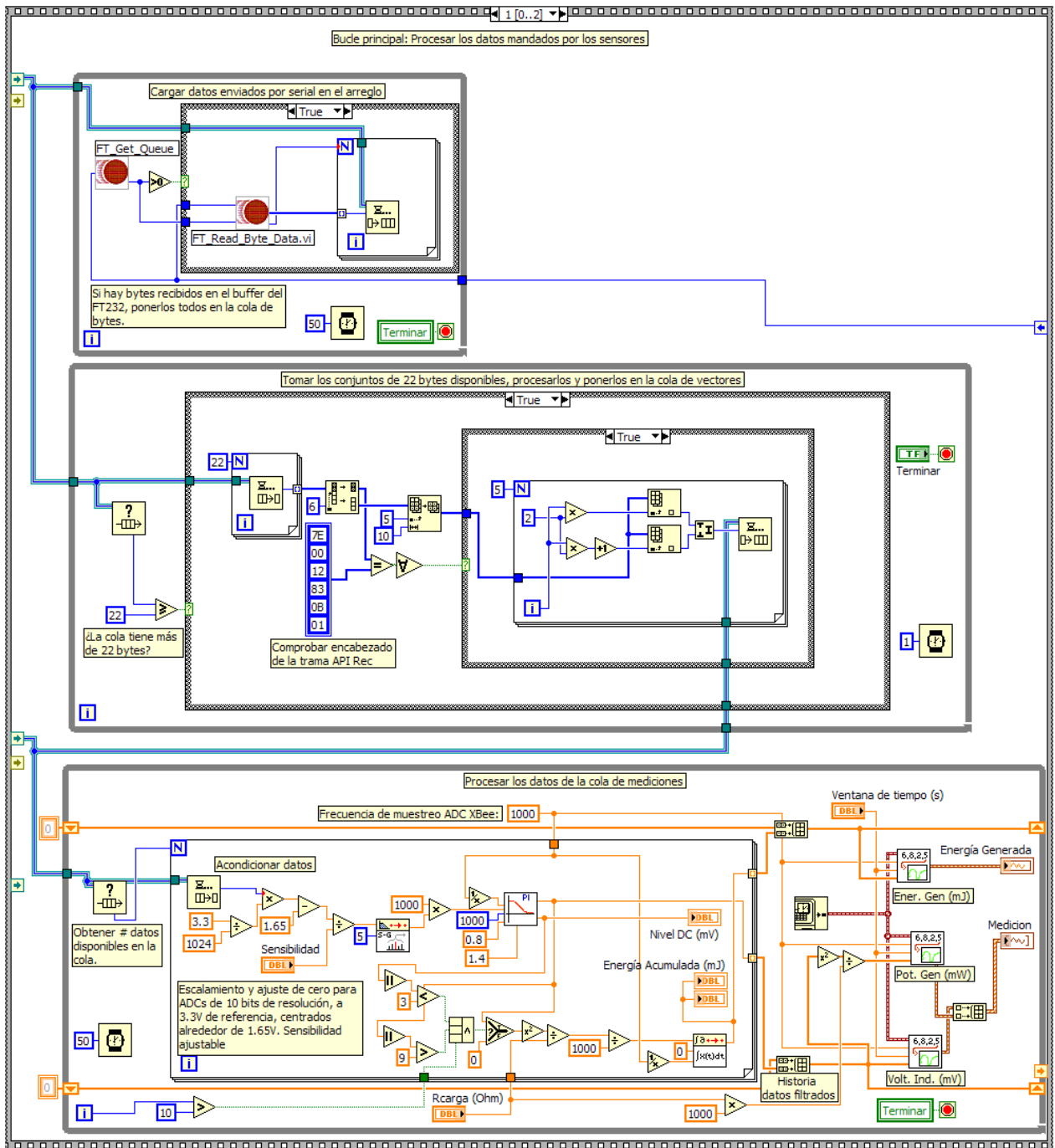
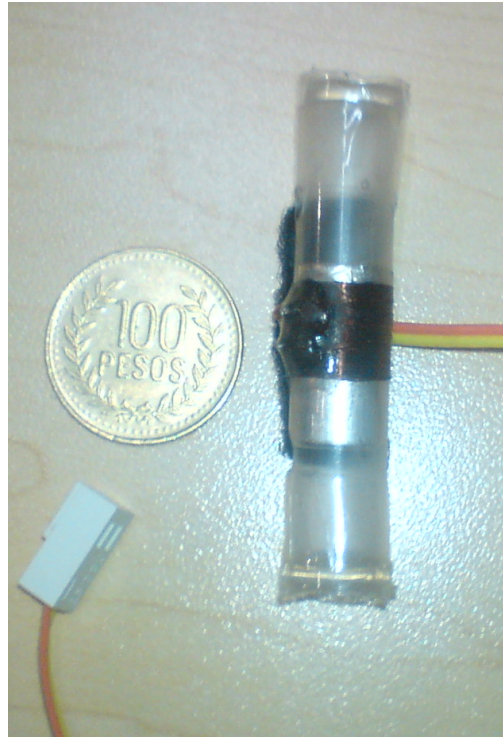


Figura 4.10: Programación de la aplicación de adquisición de datos en LabView



(a) Fotografía del generador



(b) Fotografía del montaje en un zapato

Figura 4.11: Fotografías del generador construido y del montaje experimental instalado

# Capítulo 5

## Resultados

En este capítulo introducimos el proceso de optimización que genera algunos de los parámetros geométricos de la estructura, y los resultados del mismo. Comparamos las simulaciones de esta geometría óptima contra los datos de la validación de su fabricación.

### 5.1. Optimización de la Estructura

#### 5.1.1. Planteamiento

Como se comentaba anteriormente, es necesario que el generador sea tan pequeño como sea posible a la vez que se maximice su capacidad de generación de energía. Es intuitivamente claro que estos dos requerimientos están en conflicto, principalmente por que a mayor intensidad de campo magnético emanado por el imán móvil, mayor voltaje inducido. Esto se logra aumentando la magnetización del imán y aumentando su tamaño (ver [ecuación 2.2.15](#)). Como la magnetización del imán viene determinada por el grado del mismo, este es un parámetro que difícilmente podría mejorarse. Por lo tanto, no está bajo control. La única alternativa es entonces adquirir imanes más grandes. En vista de que éste sistema dinámico es no-lineal y que una de sus figuras de mérito necesita ser calculada por medio de una simulación (la energía generada), no podemos explorar el espacio de parámetros geométricos libremente porque cada evaluación en un punto de este espacio requiere de varios minutos (en ciertos casos se ha demorado 30 minutos en un procesador AMD Athlon 64 @ 3 GHz). Por tanto, nuestro presupuesto de evaluaciones de la energía generada es limitado, y se debe hacer un uso limitado del mismo. Adicionalmente esto significa que para el proceso de optimización no disponemos del gradiente de la función objetivo de energía, por lo que el algoritmo de optimización que se vaya a emplear no debe requerir que se le suministren los gradientes de la función objetivo. Las anteriores restricciones del problema sugieren un algoritmo heurístico, de entre los cuales podemos encontrar:

- Algoritmos Genéticos
- Optimización de Enjambre (también conocido como “Colonia de Hormigas”)
- Recocido Simulado (en inglés *Simulated Annealing*)
- Búsqueda de Patrón.

De entre todos los anteriores y otros que se pueden encontrar en Internet, se eligió usar un algoritmo genético debido a las siguientes razones:

- Convergencia a un óptimo o cercana en menos iteraciones que otros algoritmos heurísticos (particularmente el Recocido Simulado)
- No es “codicioso”: No queda atrapado en mínimos locales fácilmente
- Interpretación de comportamiento muy directa y familiar
- Optimización Multiobjetivo implementada en un paquete de herramientas de MATLAB

La última razón es muy importante, pues nos ahorró tiempo de programación y en vez de eso nos permitió concentrarnos en los resultados. En la optimización multiobjetivo, el algoritmo busca una región en el espacio de parámetros, conocida en la literatura técnica como “frente de Pareto” [40], que cumple con la siguiente propiedad: Todo punto perteneciente al frente de Pareto es tal que un cambio en sus parámetros que induzca una mejora en uno de los objetivos, inducirá una desmejora en otros de los objetivos. Esto es muy valioso, porque al no conocer de forma cerrada la relación entre energía producida y volumen del generador, no podemos con total certeza plantear la función objetivo para una optimización simple (de un solo objetivo). Al disponer de algunos de los puntos del frente de Pareto, podremos entonces probar algunas funciones de mérito que nos permitan elegir una configuración óptima.

El programa de optimización hecho en MATLAB es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x})) \\ & \text{sujeto a } (-1, 1)\mathbf{x} \leq 0 \\ & (5, 1)^T \leq \mathbf{x} \leq (10, 10)^T \end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{x} = (L, L_b)^T$  es el vector de parámetros geométricos de longitud total del generador  $L$  y longitud del embobinado  $L_b$ ,  $F_1(x)$  es el negativo de la energía por paso de marcha generada en el estado estable de la simulación y  $F_2(x) = r_b^2 L$  es una medida del volumen del generador. Las unidades están expresadas en centímetros. El minimizar el negativo de la energía generada es una forma equivalente de hacer maximización de esta cantidad. Es necesario expresarlo así porque el algoritmo de MATLAB busca siempre minimizar las funciones objetivo. Los límites del vector  $\mathbf{x}$  se establecieron midiendo las zuelas de zapatos de distintos tamaños, buscando la mayor compatibilidad posible a la vez que no se restringiera tanto el volumen del generador. Si se observa este planteamiento del programa, aquí solamente 2 de los 8 parámetros geométricos del generador (mostrados en la [figura 2.1](#)) se involucran en el programa. Esto se debe a que el programa se corre fijando los demás parámetros, pues éstos son determinados por la disponibilidad del mercado de imanes de Neodimio. El programa se corrió para cada una de las combinaciones de dimensiones geométricas dadas en la [tabla 5.1](#). El resultado del programa se resume en la [tabla 5.1\(a\)](#).

### 5.1.2. Resultados

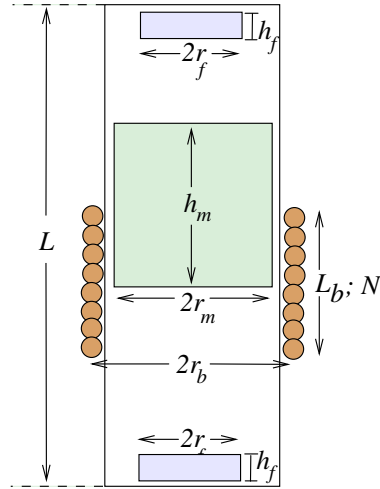
En las figuras [5.2\(a\)](#) y [5.2\(b\)](#) se observan en las gráficas superiores la evolución de las dos funciones objetivo para 3 generaciones del algoritmo genético, evidenciando una mejora en el desempeño de las geometrías que el algoritmo evalúa conforme pasan las iteraciones. Una figura de mérito representativa (aunque no completa) de este desempeño es la densidad de energía, tomando el cociente de la energía generada por ciclo entre el volumen del generador. Este índice se muestra en la gráfica inferior de dicha figura. No se simuló más generaciones, pues el tiempo no lo permitía, ya que para estas 160 evaluaciones de la función objetivo se tardó cerca de 20 horas.

Combinación	Imán Fijo		Imán Móvil	
	$r_f$ [mm]	$h_f$ [mm]	$r_m$ [mm]	$h_m$ [mm]
1	2.5	3	2.5	15
2	3	2	3.5	10
3	5	2	5	7
4	5	2	5	10
5	6	3	6.5	14
6	7.5	4	8.5	15

Tabla 5.1: Combinaciones de imanes fijos y móviles probadas en el programa de optimización

Parámetro	Medida [mm]
$r_f$	5
$h_f$	2
$r_m$	5
$h_m$	20
$L$	50
$r_b$	6
$L_b$	10
$N$	132 [-]

(a) Geometría óptima calculada por el algoritmo genético



(b) Dimensiones del Generador

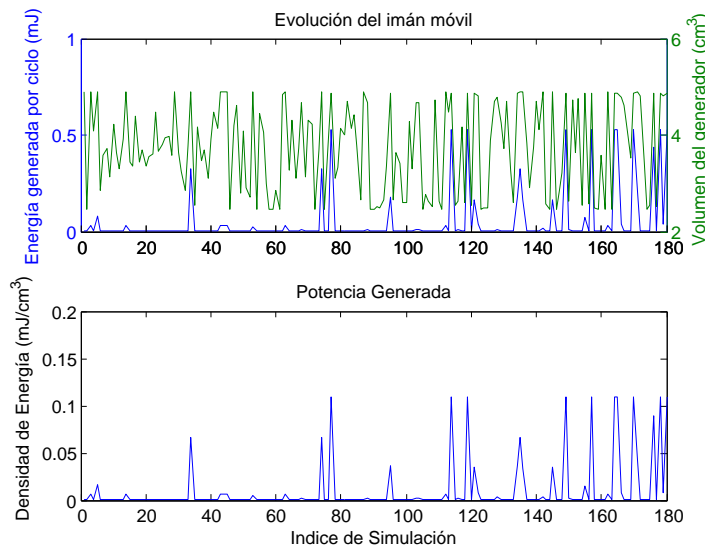
Figura 5.1: Resultado del programa de optimización

## 5.2. Datos experimentales

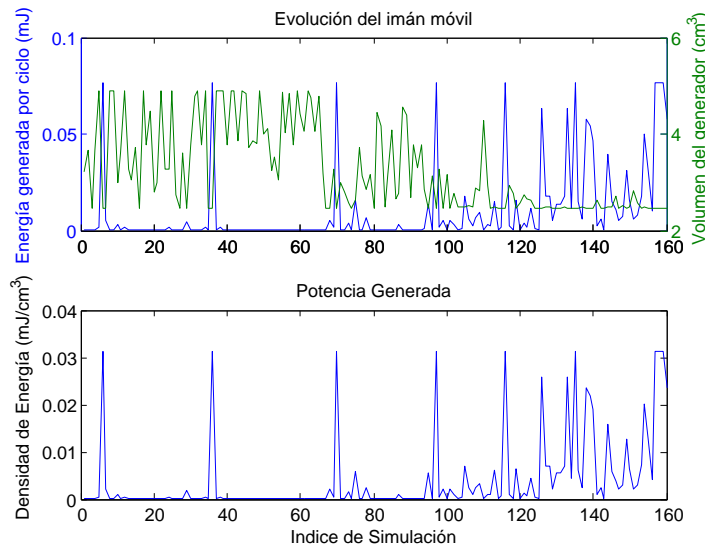
Empleando el montaje experimental descrito en la [sección 4.2](#), se efectuaron capturas de datos de 10 segundos para cada uno de los movimientos. Para observar la respuesta del generador con parámetros geométricos diferentes a los obtenidos en simulación, manteniendo los demás parámetros de la [tabla 5.1\(a\)](#) constantes, se variaron los imanes fijos en las configuraciones mostradas en la [tabla 5.2](#).

Configuración	$r_f$ [mm]	$h_f$ [mm]
1	5	2
2	1.5	0.8

Tabla 5.2: Configuraciones de imanes fijos probadas en la validación experimental



(a) Combinación 5

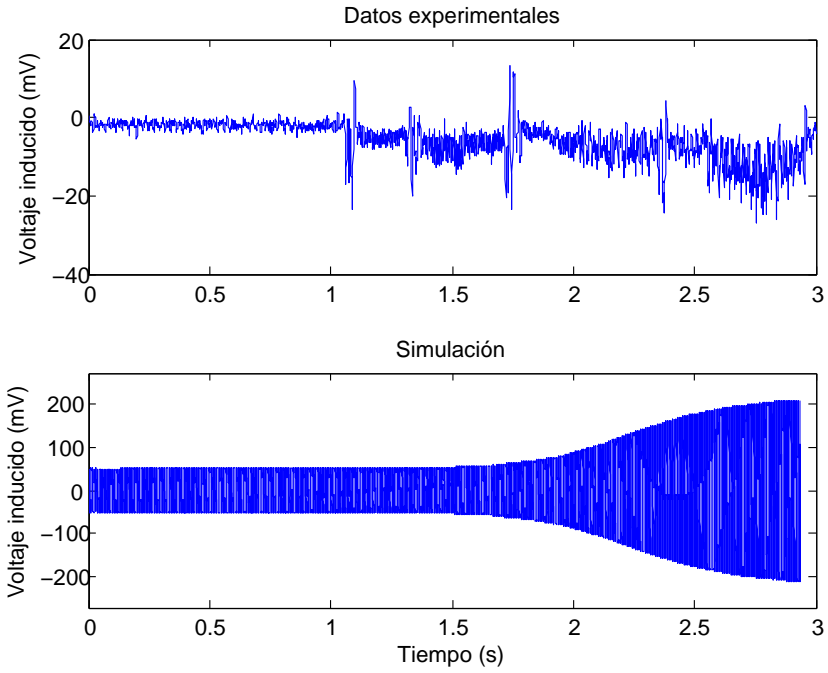


(b) Combinación 6

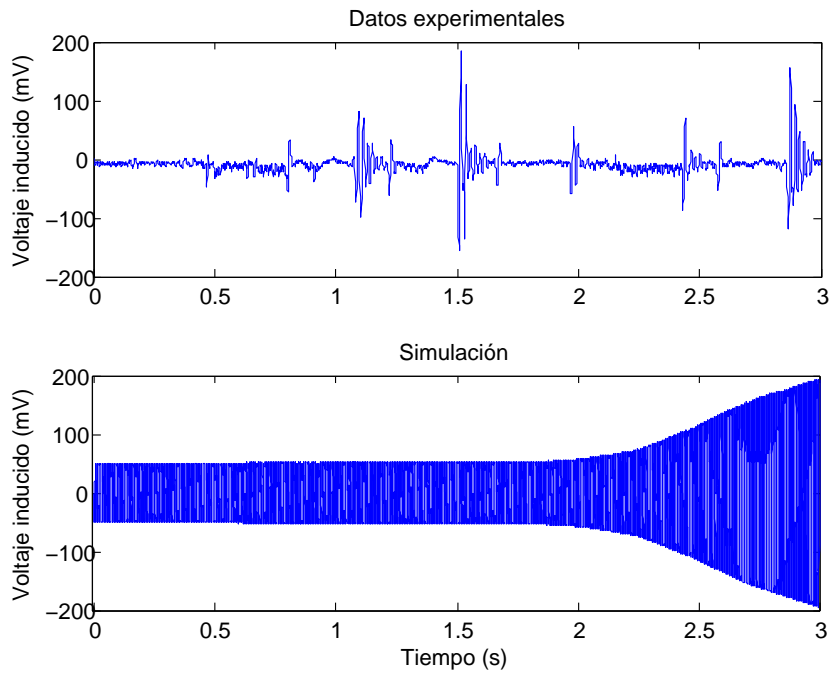
Figura 5.2: Comparación de potencias generadas en cada miembro por cada movimiento, durante un ciclo de marcha, para dos combinaciones de parámetros geométricos (ver [tabla 5.1](#))

### 5.2.1. Resultados usando la configuración 1

Con estos imanes fijos, de todos los movimientos corporales estudiados, los únicos que indujeron voltajes visibles (del orden de decenas de mV) fueron los dos más fuertes (trote y carrera). En la [figura 5.3\(a\)](#) se puede ver que la diferencia fundamental entre los datos experimentales y la simulación es que la última presenta una forma de resonancia u oscilación sostenida, mientras que los pulsos inducidos de los datos experimentales son de corta vida y baja amplitud, evidenciando un sistema con bajo acople al movimiento. Los datos experimentales indican un voltaje inducido de máximo 40 mVpp, mientras que la simulación indica un máximo de 200 mVpp. Para movimientos más fuertes, como el caso de carrera mostrado en la [figura 5.3\(b\)](#), se observa que el sistema es más sensible (responde más al movimiento) y los voltajes pico generados corresponden mejor con los de



(a) Marcha de Trote



(b) Marcha de Carrera

Figura 5.3: Comparaciones Experimento/Simulación para la Configuración 1 (ver la [tabla 5.2](#))

la simulación. Respecto a la generación de potencia y energía, para estas mismas adquisiciones de datos observe las figuras 5.4(a) y 5.4(c). Allí se presentan la forma de onda de la potencia generada instantánea y algunos parámetros estadísticos que la describen, junto con su integral en el tiempo, que calcula la energía generada en todo el movimiento. El contraste de ambos muestra que en esta configuración el generador la marcha de carrera induce cerca de un orden de magnitud más potencia RMS, con una potencia pico de 4 mW. Sin embargo, el fuerte amortiguamiento (evidenciado por la corta duración de los pulsos de voltaje) aún impide una mayor extracción de energía.

### 5.2.2. Resultados usando la configuración 2

Con esta configuración, al ser la fuerza de repulsión magnética entre el imán móvil y los fijos mucho menor, éste obtiene mayor libertad de movimiento, incluso llegando a impactarlos frecuentemente al ser sometido a las marchas que probamos en esta validación experimental. Estos choques son indicio de operación subóptima, pues son energía desperdiciada. Sin embargo, con estos imanes se evidencia una mayor extracción de energía. En la figura 5.5 se muestran las adquisiciones de datos de dos experimentos (dos tipos de marcha) que usan los imanes fijos de ésta configuración. Dos cosas se resaltan de esta configuración: Todos los movimientos o marchas generaron niveles apreciables de potencia, y para movimientos iguales, estos niveles son mayores que los alcanzados usando la configuración 1. Para hacer esta comparación, se pueden contrastar las formas de onda de la figura 5.3(a) con la de la figura 5.5(b). Así mismo, presentamos los datos de potencia generada en la figura 5.6. Respecto a los resultados de la figura 5.4, se observa un factor de incremento en la energía generada cercano a 3. Comparando las formas de onda de voltaje y potencia, podemos atribuir este incremento a un amortiguamiento efectivo reducido, lo cual era de esperarse en vista de la mayor movilidad de la que goza el imán móvil en esta configuración.

## 5.3. Discusión de resultados

En los anteriores resultados encontramos las siguientes características comunes de las respuestas medidas:

- El amortiguamiento efectivo reduce la duración de los pulsos de voltaje inducido.
- No se establece ninguna forma de resonancia u oscilación sostenida.
- La generación de energía es menor a la deseada.

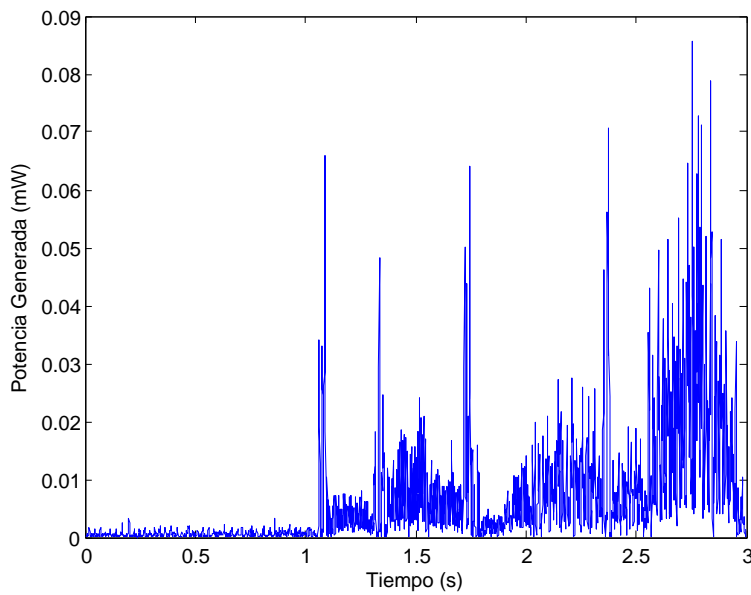
Las posibles razones por las cuales el comportamiento del generador fabricado no se comporta como se espera, de forma subóptima y drásticamente diferente a la simulación son, a saber:

#### ■ El acople mecánico

Una transferencia completa del movimiento del pie al imán móvil se da dependiendo del acople mecánico entre éstas dos partes. A menor movimiento relativo entre el generador y la fuente de movimiento, mayores serán los voltajes generados.

#### ■ La magnetización remanente de los imanes

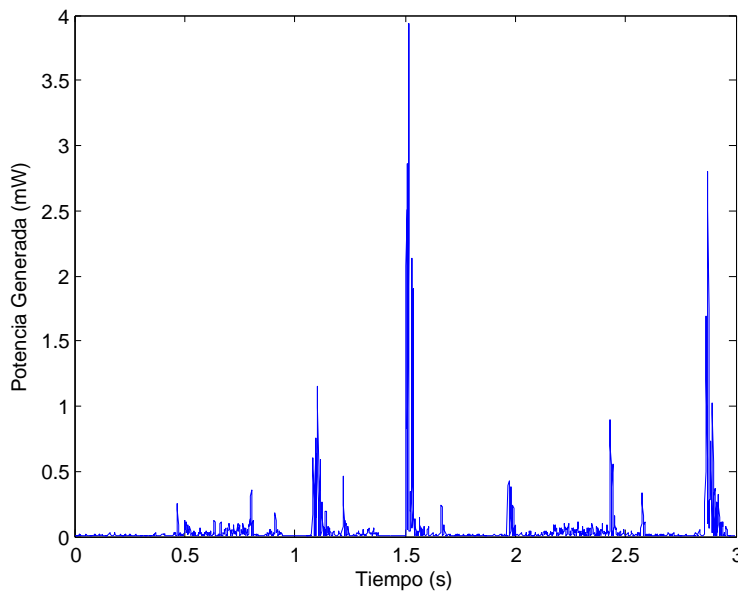
Si se observan las ecuaciones (2.2.1) y (2.3.1), si la magnetización de los imanes incluye una variación significativa, los términos de volumen pueden contribuir de forma apreciable y reducir la exactitud de las simulaciones. Por tanto, la fuerza de interacción entre pares de



(a) Marcha Trote: Potencia generada

Cantidad	Valor [mW]
Valor Medio	0.0061311
Valor RMS	0.011287
Desv. Est.	0.0094777
Valor Max.	0.085536
Energía Generada	0.018393 mJ

(b) Marcha Trote: Estadísticas de generación

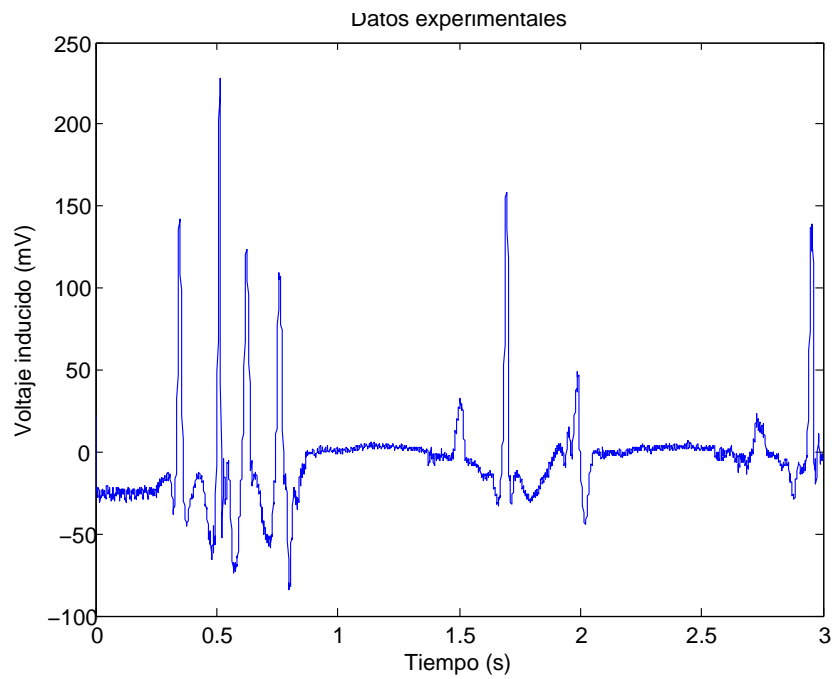


(c) Marcha Carrera: Potencia generada

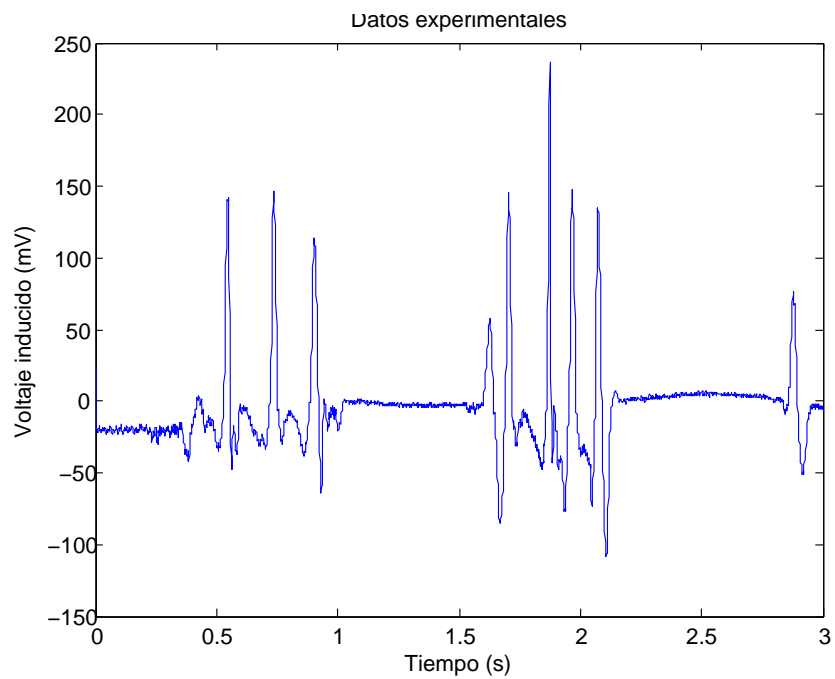
Cantidad	Valor [mW]
Valor Medio	0.054809
Valor RMS	0.23033
Desv. Est.	0.22375
Valor Max.	3.9402
Energía Generada	0.16443 mJ

(d) Marcha Carrera: Estadísticas de generación

Figura 5.4: Generación de Energía con la Configuración 1 (ver la [tabla 5.2](#))

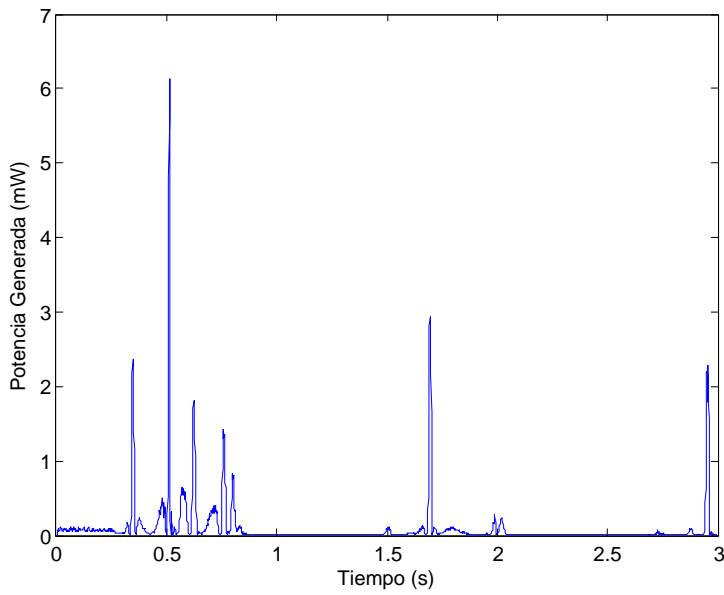


(a) Marcha de Caminata Normal



(b) Marcha de Trote

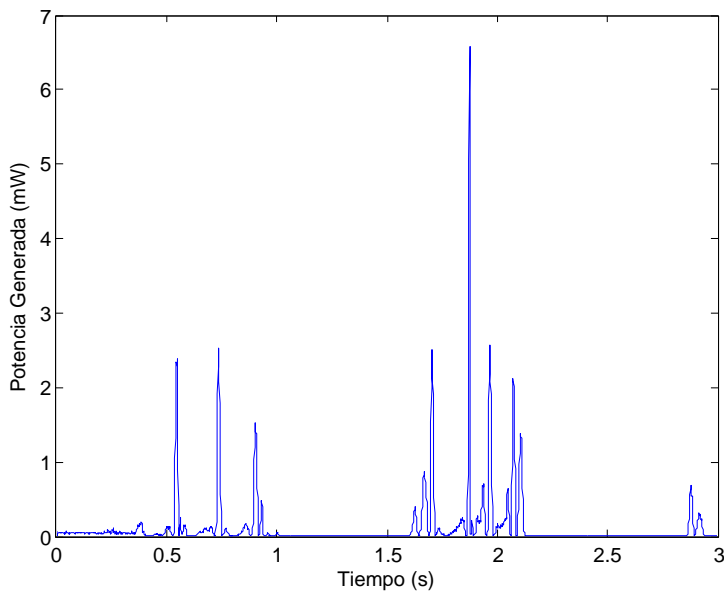
Figura 5.5: Datos de voltaje de 2 experimentos con la Configuración 2 (ver la [tabla 5.2](#))



(a) Marcha Normal: Potencia generada

Cantidad	Valor [mW]
Valor Medio	0.10065
Valor RMS	0.37991
Desv. Est.	0.36639
Valor Max.	6.1292
Energía Generada	0.30192 mJ

(b) Marcha Normal: Estadísticas de generación



(c) Marcha Trote: Potencia generada

Cantidad	Valor [mW]
Valor Medio	0.12308
Valor RMS	0.42029
Desv. Est.	0.40193
Valor Max.	6.5722
Energía Generada	0.36921 mJ

(d) Marcha Trote: Estadísticas de generación

Figura 5.6: Generación de Energía con la Configuración 2 (ver la [tabla 5.2](#))

imanes resultaría incorrecta. Esto señala que es muy importante caracterizar detalladamente los imanes, muestreando exhaustivamente su campo magnético para poder estudiar de forma precisa esta posibilidad.

■ **El amortiguamiento mecánico subestimado**

Si bien el tubo contenedor del generador fue cuidadosamente lijado y su rozamiento fue considerado bajo, una cuantificación precisa del mismo no fue llevada a cabo. Esta posibilidad también es muy plausible, en vista del amortiguamiento efectivo que se aprecia en las respuestas experimentales.

A pesar de las consideraciones anteriores, es importante resaltar que los resultados obtenidos son alentadores e invitan a realizar un refinamiento en todos los procedimientos experimentales, a fin de calibrar mejor todos los parámetros del modelo y poder construir un generador eficiente, a través del proceso de optimización implementado.

# Comentarios Finales

En este trabajo de tesis se calculó, fabricó y caracterizó una arquitectura de aprovechamiento de movimientos corporales, que genera voltaje a partir de los mismos. Una característica importante de esta arquitectura es que su efecto de carga mecánica sobre su fuente es muy bajo, en consideración al poco volumen y pequeña masa que posee en comparación con la masa y volumen típicos de las extremidades inferiores humanas. Las dimensiones del generador implementado son incluso aptas para que este sea integrado en el cuerpo de un zapato deportivo, mejorando considerablemente el acople mecánico y maximizando el comfort al usarlo, volviendolo efectivamente imperceptible para el usuario.

Usando imanes fijos como los de la configuración 2 (ver la [tabla 5.2](#)) los voltajes generados pueden ser útiles para alimentar dispositivos portables de baja potencia. Para realizar esta aplicación, se requiere de un circuito de adaptación, que efectúe funciones de elevación y regulación de voltaje de tal forma que cumpla con las especificaciones de alimentación típicas de los dispositivos portables comunes (p.ej. celulares). Este circuito de adaptación es una extensión importante de este trabajo, siendo imprescindible para poder realizar una aplicación práctica de ésta arquitectura.

En el modelo y cálculos realizados en este trabajo a partir de principios físicos, nunca se reducen o aproximan las ecuaciones de campo magnético, fuerza magnética, fuerza electromotriz inducida ni de fuerza electromagnética de amortiguamiento. Esto hace que las fórmulas desarrolladas para el cálculo de estos observables físicos sean válidas en todas las escalas en las que aplica el electromagnetismo clásico, lo cual las hace muy versátiles y aplicables a otros modelamientos matemáticos que involucren los objetos aquí estudiados. Un resultado importante de este modelamiento es poder observar que la aproximación continua de una bobina (sumar los voltajes inducidos de cada espira en una integral) subestima el voltaje inducido respecto al cálculo más exacto que se obtiene al sumar de forma discreta la contribución de cada una de las espiras de la bobina. Este punto no fue tratado en detalle en este documento por estar fuera del alcance del mismo, pero por sí mismo vale la pena mencionarlo.

La validación experimental del generador arrojó indicios de la efectividad del algoritmo genético implementado para la optimización de la geometría del generador, pues aún con la gran discrepancia observada entre el comportamiento real y el simulado, los niveles de generación son apenas un orden de magnitud inferiores a los esperados (si se usa la configuración 2), lo cual, como se mencionaba antes, invita a efectuar unas cuantas más iteraciones del ciclo de diseño.

Los circuitos implementados para la validación experimental (ver [sección 4.2](#)) al ser concebidos con miras a la versatilidad y flexibilidad, son herramientas útiles en: adquisición de datos inalámbrica en tiempo real y medición de señales de baja amplitud en dispositivos portables. Un ejemplo de esto dentro de este proyecto es la medición aceleración ejercida en el generador por medio de la incorporación de un acelerómetro uni o bi-axial. Estos dispositivos normalmente entregan salidas lineales, proporcionales a la aceleración medida, por lo cual requieren de un circuito de muestreo y conversión para digitalizar la medición. Empleando el circuito de la [figura 4.6](#), agregar esta funcionalidad se torna muy sencillo: solo se requiere conectar la(s) salida(s) del acelerómetro

a un(os) canal(es) del transceptor XBee a través de uno de los cabezales dispuestos y reconfigurar el mismo (aparte de proveer de la alimentación y posiblemente un(os) seguidor(es) de voltaje para adaptar la(s) impedancia(s) de salida del acelerómetro al(a los) canal(es) de conversión del transceptor XBee.

Finalmente, queremos listar las posibles extensiones a este trabajo, con miras a continuar la investigación en la Universidad en este campo de Cosecha de Energía:

- **Adición de un acelerómetro 1D o 2D a la caracterización experimental**

Para poder validar numéricamente de forma precisa una simulación del generador, es necesario conocer experimentalmente la excitación y respuesta del mismo. Por tanto, es preciso añadir al montaje de validación un acelerómetro alineado con la estructura del generador, y modificar la aplicación de adquisición para capturar y procesar estos nuevos datos.

- **Caracterización del amortiguamiento efectivo**

Por medio de algún procedimiento de ajuste de modelo, determinar el(los) coeficiente(s) de rozamiento efectivo(s) del imán móvil con el tubo contenedor de la estructura, con y sin presencia de los imanes fijos, de manera que se tenga un método preciso de evaluar la fricción del sistema y ajustar así las simulaciones del mismo.

- **Caracterización de los imanes**

Como se discutió antes, si la magnetización remanente de los imanes es considerablemente distinta al modelo constante y axial que se asumió en este trabajo, la precisión de las simulaciones puede verse fuertemente afectada. Por tanto, es necesario configurar un montaje de medición de campo magnético con una buena resolución espacial, de forma que se pueda mapear el campo magnético emanado por un imán y generar con este mapa de datos el modelo de magnetización que mejor se ajuste.

- **Estudio de variantes de la geometría**

Hay varias posibilidades para la modificación de esta geometría, por ejemplo, el empleo de varios imanes móviles y/o varias bobinas. El empleo de varios imanes móviles y/o imanes móviles cuyo radio sea menor que su grosor en la práctica requiere de la adición de un eje central que impida la rotación de los mismos, debido al torque de atracción debido a los imanes fijos. Esto implica que todos los imanes deberán ser taladrados, lo cual es una operación que supone varios inconvenientes técnicos [41] que solo empresas especializadas pueden manejar. Sin embargo, tiene potencial para niveles de generación iguales con volúmenes del generador menores.

# Bibliografía

- [1] J. Feenstra, J. Granstrom, y H. Sodano, “Energy harvesting through a backpack employing a mechanically amplified piezoelectric stack,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 3, pp. 721–734, April 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2007.09.015>
- [2] E. Yeatman y P. Mitcheson, “Energy scavenging,” en *Body Sensor Networks*, 2006, pp. 183–217. [En Línea]. Disponible: [http://dx.doi.org/10.1007/1-84628-484-8\\_6](http://dx.doi.org/10.1007/1-84628-484-8_6)
- [3] J. A. Paradiso y T. Starner, “Energy scavenging for mobile and wireless electronics,” *Pervasive Computing, IEEE*, vol. 4, no. 1, pp. 18–27, 2005. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/MPRV.2005.9>
- [4] P. D. Mitcheson, E. M. Yeatman, G. K. Rao, A. S. Holmes, y T. C. Green, “Energy harvesting from human and machine motion for wireless electronic devices,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 96, no. 9, pp. 1457–1486, Sept. 2008.
- [5] E. Halvorsen, “Energy harvesters driven by broadband random vibrations,” *IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 17, no. 5, pp. 1061–1071, Oct. 2008.
- [6] J. K. Ward y S. Behrens, “Adaptive learning algorithms for vibration energy harvesting,” *Smart Materials and Structures*, vol. 17, no. 3, p. 035025, 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1088/0964-1726/17/3/035025>
- [7] C. R. Saha, T. O’Donnell, N. Wang, y P. Mccluskey, “Electromagnetic generator for harvesting energy from human motion,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. In Press, Corrected Proof. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2008.03.008>
- [8] C. Serre, A. Pérez-Rodríguez, N. Fondevilla, E. Martincic, S. Martínez, J. R. Morante, J. Montserrat, y J. Esteve, “Design and implementation of mechanical resonators for optimized inertial electromagnetic microgenerators,” *Microsyst. Technol.*, vol. 14, no. 4, pp. 653–658, 2008.
- [9] J. Martinez-Quijada y S. Chowdhury, “A two-stator mems power generator for cardiac pacemakers,” en *Circuits and Systems, 2008. ISCAS 2008. IEEE International Symposium on*, 2008, pp. 161–164. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/ISCAS.2008.4541379>
- [10] C. T. Pan y Y. J. Chen, “Application of low temperature co-fire ceramics on in-plane micro-generator,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 144, no. 1, pp. 144–153, May 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2007.12.008>
- [11] R. N. Torah, M. J. Tudor, K. Patel, I. N. Garcia, y S. P. Beeby, “Autonomous low power microsystem powered by vibration energy harvesting,” en *Sensors, 2007 IEEE*, 2007, pp. 264–267. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/ICSENS.2007.4388387>

- [12] Z. L. Wang, "Energy harvesting for self-powered nanosystems," *Nano Research*, vol. 1, no. 1, pp. 1–8, Julio 2008.
- [13] I. Kuehne, "A new approach for mems power generation based on a piezoelectric diaphragm," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 142, no. 1, pp. 292–297, March 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2007.04.031>
- [14] P. Glynn-Jones, S. P. Beeby, y N. M. White, "Towards a piezoelectric vibration-powered microgenerator," *Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings -*, vol. 148, no. 2, pp. 68–72, 2001. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1049/ip-smt:20010323>
- [15] J. A. Potkay y K. Brooks, "An arterial cuff energy scavenger for implanted microsystems," en *Bioinformatics and Biomedical Engineering, 2008. ICBBE 2008. The 2nd International Conference on*, 2008, pp. 1580–1583. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/ICBBE.2008.723>
- [16] V. Berbyuk y J. Sodhani, "Towards modelling and design of magnetostrictive electric generators," *Computers & Structures*, vol. 86, no. 3-5, pp. 307–313, February 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.01.030>
- [17] Y. Chiu y V. F. G. Tseng, "A capacitive vibration-to-electricity energy converter with integrated mechanical switches," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 18, no. 10, pp. 104 004+, 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1088/0960-1317/18/10/104004>
- [18] B. C. Yen y J. H. Lang, "A variable-capacitance vibration-to-electric energy harvester," *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 288–295, 2006. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2005.856043>
- [19] I. Kuehne, "Power mems - a capacitive vibration-to-electrical energy converter with built-in voltage," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 142, no. 1, pp. 263–269, March 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2007.02.036>
- [20] M. E. Kiziroglou, C. He, y E. M. Yeatman, "Rolling rod electrostatic microgenerator," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 4, pp. 1101–1108, 2009. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/TIE.2008.2004381>
- [21] W. Ma, R. Zhu, L. Rufer, Y. Zohar, y M. Wong, "An integrated floating-electrode electric microgenerator," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 16, no. 1, pp. 29–37, 2007. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/JMEMS.2006.885856>
- [22] H. Glosch, "A thermoelectric converter for energy supply," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 74, no. 1-3, pp. 246–250, April 1999. [En Línea]. Disponible: [http://dx.doi.org/10.1016/S0924-4247\(98\)00298-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0924-4247(98)00298-2)
- [23] S. Dalola, V. Ferrari, M. Guizzetti, D. Marioli, E. Sardini, M. Serpelloni, y A. Taroni, "Autonomous sensor system with rf link and thermoelectric generator for power harvesting," en *Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, 2008. IMTC 2008. IEEE*, 2008, pp. 1376–1380. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/IMTC.2008.4547257>

- [24] V. Leonov, P. Fiorini, S. Sedky, T. Torfs, y C. Van Hoof, “Thermoelectric mems generators as a power supply for a body area network,” vol. 1, 2005, pp. 291–294 Vol. 1. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/SENSOR.2005.1496414>
- [25] N. Guilar, A. Chen, T. Kleeburg, y R. Amirtharajah, “Integrated solar energy harvesting and storage,” en *ISLPED '06: Proceedings of the 2006 international symposium on Low power electronics and design*. New York, NY, USA: ACM, 2006, pp. 20–24. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1145/1165573.1165580>
- [26] J. Alberola, J. Pelegri, R. Lajara, y J. J. Perez, “Solar inexhaustible power source for wireless sensor node,” en *Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, 2008. IMTC 2008. IEEE*, 2008, pp. 657–662. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/IMTC.2008.4547118>
- [27] J. Alberola, J. Pelegri-Sebastia, R. Lajara, y J. Perez, “Solar inexhaustible power source for wireless sensor node,” en *International Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Victoria, Vancouver Island, British Columbia, Canada, May 2008.
- [28] H. E. Duckworth, *Electricity and Magnetism*. Holt, Rinehart and Winston, 1960, pp. 180–181. [En Línea]. Disponible: [http://www.daviddarling.info/encyclopedia/S/Seebeck\\_effect.html](http://www.daviddarling.info/encyclopedia/S/Seebeck_effect.html)
- [29] L. Mateu y F. Moll, “Appropriate charge control of the storage capacitor in a piezoelectric energy harvesting device for discontinuous load operation,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 132, no. 1, pp. 302–310, November 2006. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2006.06.061>
- [30] J. T. Scruggs, “An optimal stochastic control theory for distributed energy harvesting networks,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 320, no. 4-5, pp. 707–725, March 2009. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.001>
- [31] A. Muhtaroglu, A. Yokochi, y A. Vonjouanne, “Integration of thermoelectrics and photovoltaics as auxiliary power sources in mobile computing applications,” *Journal of Power Sources*, vol. 177, no. 1, pp. 239–246, February 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpowsour.2007.11.016>
- [32] T. T. Toh, P. D. Mitcheson, A. S. Holmes, y E. M. Yeatman, “A continuously rotating energy harvester with maximum power point tracking,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 18, no. 10, pp. 104008+, 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1088/0960-1317/18/10/104008>
- [33] C. Peters, D. Spreemann, M. Ortmanns, y Y. Manoli, “A cmos integrated voltage and power efficient ac/dc converter for energy harvesting applications,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 18, no. 10, pp. 104005+, 2008. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1088/0960-1317/18/10/104005>
- [34] H. Boussetta, M. Marzencki, Y. Ammar, y S. Basrour, “Multilevel modeling of integrated power harvesting system using vhdl-ams and spice,” en *Behavioral Modeling and Simulation Workshop, 2007. BMAS 2007. IEEE International*, 2007, pp. 126–131. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/BMAS.2007.4437538>

- [35] H. Hu, H. Xue, y Y. Hu, “A spiral-shaped harvester with an improved harvesting element and an adaptive storage circuit,” *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 6, pp. 1177–1187, 2007. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1109/TUFFC.2007.371>
- [36] E. M. Yeatman, “Applications of mems in power sources and circuits,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 17, no. 7, pp. S184–S188, 2007. [En Línea]. Disponible: <http://dx.doi.org/10.1088/0960-1317/17/7/S16>
- [37] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, Ed. Wiley, 1999.
- [38] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1944.
- [39] *Hoja de Especificaciones - Amplificador de Instrumentación AD620*, Revision g ed., Analog Devices Inc., 2004.
- [40] *Ayuda de MATLAB R2008a: Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox - What Is Multi-objective Optimization?*, The MathWorks, 2008.
- [41] Tolerances of super neodymium magnets. Master Magnetics Inc. Accedido el 10 de Mayo de 2009. [En Línea]. Disponible: <http://www.magnetsource.com/Solutions.Pages/NEOtolerncs.html>